Exercice : Soit ABC un triangle quelconque. On place le point P symétrique de A par rapport à B, le point Q symétrique de B par rapport à C et le point R symétrique de C par rapport à A. On appelle I le milieu de [BC] et K le milieu de [PQ]. on appelle G et H les centres de gravité des triangles ABC et PQR.
On choisit le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2. Déterminer les coordonnées du point I, puis celles du point G.
3. Déterminer les coordonnées des points R, P, Q et K.
4. Démontrer que les points G et H sont confondus.

correction : Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1. A(0 ; 0) , B(1 ; 0) , C(0 ; 1).

2. I est le milieu de [BC], d'où $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$

et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $I(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

G est le centre de gravité du triangle ABC, d'où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G\\ y_G\end{pmatrix}$

Donc $x_G = \dfrac{1}{3}$ et $y_G = \dfrac{1}{3}$ et $G(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

3. R est le symétrique de C par rapport à C, d'où A est le milieu de [RC]

et on a alors $x_A = \dfrac{x_C + x_R}{2}$ d'où $0 = \dfrac{0 + x_R}{2}$ et $x_R = 0$

et $y_A = \dfrac{y_C + y_R}{2}$ d'où $0 = \dfrac{1 + y_R}{2}$ et $y_R = -1$ Donc R(0 ; -1).

En faisant de même pour P et Q, on obtient P(2 ; 0) et Q(-1 ; 2).
De plus K est le milieu de [PQ], donc
$x_K = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = 1$ Donc $K(\frac{1}{2} ; 1)$.

H est le centre de gravité du triangle PQR, d'où $\overrightarrow{RH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{RK}$.

et $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix}x_H\\ x_H + 1\end{pmatrix}$ d'où $x_H = \dfrac{1}{3}$ et $y_H = \dfrac{1}{3}$ et $H(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$

G et H ont les mêmes coordonnées, ils sont donc confondus.