Equations – Inéquations - Tableaux de signes

I Equations

Une équation à une inconnue est une égalité dans laquelle figure une lettre représentant une valeur inconnue que l'on cherche à déterminer.
Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie (Il peut y en avoir plusieurs).
Résoudre une équation c'est déterminer l'ensemble de **toutes** les solutions de l'équation.

a) équations de degré 1 :

$(E_1) : 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$ on écrit : $S_1 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Pour résoudre une équation de degré 1 on peut :
① additionner un même nombre aux deux membres de l'égalité .
② multiplier les deux membres de l'égalité par un même nombre **non nul**.

$(E_2) : 3(x + 2) = x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 6 = x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - x = -4 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -10 \quad \Leftrightarrow$
$x = \frac{-10}{2} = -5$ donc $S = \{-5\}$

b) Équations de degré supérieur ou égal à 2

Exemples :

- $(E_1) : (2x+3)^2 = (4x+1)(x -5)$

Lorsqu'on développe on obtient une équation du premier degré

- $(E_2) : 2(x +2)(x-3) = x^2 - 4$

Lorsqu'on développe les x^2 ne s'annulent pas alors on factorise

Pour résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2 :
on réunit tous les termes dans un même membre,
on factorise afin d'obtenir une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$
alors à l'aide de la règle : « Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul. », on peut conclure

Cas particulier : les équations de la forme $x^2 = a$ ont pour solution $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$ si $a>0$
$x = 0$ si $a = 0$ et pas de solution si $a<0$.

Exemple:

- $(E_3) : x(x + 1) = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x + 1) - (2x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x + 1) - 2(x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 2) = 0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

donc $(E_3) \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ ou $x = 2$ donc $S = \{-1 ; 2\}$

c) Équation quotient

Pour résoudre une équation quotient (c'est-à-dire une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur),
on réunit tous les termes dans un même membre,
on met au même dénominateur afin d'obtenir une équation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
alors on cherche les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule (en factorisant Q(x) comme en b) et on résout dans $\mathbb{R}$ privé des valeurs trouvées précédemment l'équation du numérateur égal à 0 (en factorisant P(x) comme en b)

Exemple : $\frac{x(x-3)}{x-2} = \frac{2(x-3)}{x-2}$

II Inéquations

Une inéquation est une inégalité **Résoudre** une inéquation c'est déterminer l'intervalle contenant **toutes** les solutions

a) Inéquation du premier degré.

exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter graphiquement l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

$3x + 6 < 7x - 8$

$2 - \frac{x+1}{3} \leq 7 + \frac{2x-1}{3}$

b) inéquation du second degré

exemple : (I_1) $2(5-3x) > -3x(5-3x)$

on obtient $(5-3x)(2+3x) > 0$

On se ramène à une inéquation de la forme $(ax + b)(cx + d) < 0$ (ou $>$, $\leq$, $\geq$) alors on fait un tableau de signes

A savoir : Signe de ax + b

ax + b est du signe de a lorsque x > -b/a

du signe opposé de a lorsque x < -b/a

Car la fonction affine f telle que f(x) = ax + b est croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque a>0

et est décroissante sur $\mathbb{R}$ lorsque a<0

Exemple :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de 5 - 3x		+	0	-	

Construire un tableau donnant le signe de : 2 + 3x

A savoir : Signe d'un produit de facteurs du premier degré

Le produit de deux facteurs positifs est positif

Le produit de deux facteurs négatifs est positif

Le produit de deux facteurs de signes différents est négatif

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de 5 - 3x	
Signe de 2 + 3x	
Signe du produit	

Conclure : quel est le signe de $(5-3x)(2+3x)$?

Les solutions de (I_1) sont :

Application : étudier le signe de $(x - 5)(2 - 4x)$ dans un tableau

Résoudre l'inéquation (I_2) : $(x - 5)(2 - 4x) \geq 0$

c) Inéquation quotient

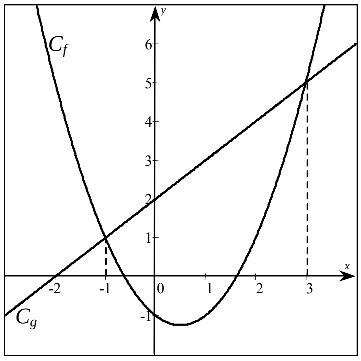
On se ramène à une inéquation de la forme $\frac{(ax + b)}{(cx + d)} = 0$ (par ex ….)

Puis on fait un tableau de signes

Exemple: $\frac{x(x-3)}{x-2} < 0$

III Résolutions graphiques

On peut résoudre des équations et des inéquations en traçant les courbes correspondantes dans un repère et en lisant graphiquement les solutions.



Exemple

(E) : $x^2 - x - 1 = x + 2$

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$ et g la fonction définie par $g(x) = x + 2$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques.

Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes donc S = $\{-1 ; 3\}$.

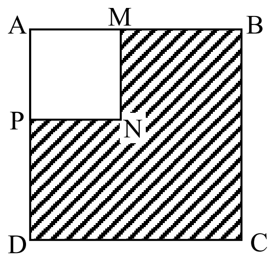
IV Problème conduisant à une équation (ou une inéquation)

Pour résoudre un problème conduisant à une équation, il faut respecter les quatre étapes suivantes :

① Choix de l'inconnue ② Mise en équation

③ Résolution de l'équation ④ Conclusion

Exemple



ABCD est un carré de côté 20 cm. AMNP est un carré. Où placer le point M sur le segment [AB] pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à 351 cm² ?

① Choix de l'inconnue

Soit x la longueur AM en cm. (Ne pas oublier de préciser les unités)

② Mise en équation

L'aire de ABCD est $20 \times 20 = 400$ cm² et l'aire de AMNP est x^2 donc l'aire de la partie hachurée est $400 - x^2$.

L'équation à résoudre est donc $400 - x^2 = 351$

③ Résolution

$400 - x^2 = 351 \iff 400 - x^2 - 351 = 0 \iff 49 - x^2 = 0 \iff (7 - x)(7 + x) = 0 \iff 7 - x = 0$ ou $7 + x = 0 \iff x = 7$ ou $x = -7$ donc S = $\{-7 ; 7\}$

④ Conclusion

Seule la solution positive convient car AM est une longueur.

M doit donc être situé à 7 cm de A.

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x^3 - 16x < 0$ $x(x + 1) \geq (1 - 3x)(x + 1)$ $2x(3x - 4) < -x(x + 2)$ $9(x + 1)^2 < (x + 2)^2$

$\frac{2-x}{3+7x} \leq 0$ $\frac{3+x}{1-x} \geq 2$ $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2x-1}$ $\frac{x-2}{4x-5} \leq \frac{4x-5}{x-2}$