Le triangle bouge dans le carré : Éléments de réponses

1) Il faut définir des points P_1 et Q_1 pour le cas ou M est sur [AO] et des points P_2 et Q_2 pour le cas ou M est sur [OC]. Géogébra permet d'afficher la distance AM, l'aire du triangle AP_1Q_1 et celle du triangle AP_2Q_2. On peut , en faisant bouger le point M, répondre aux trois questions, mais les résultats ne sont pas précis.

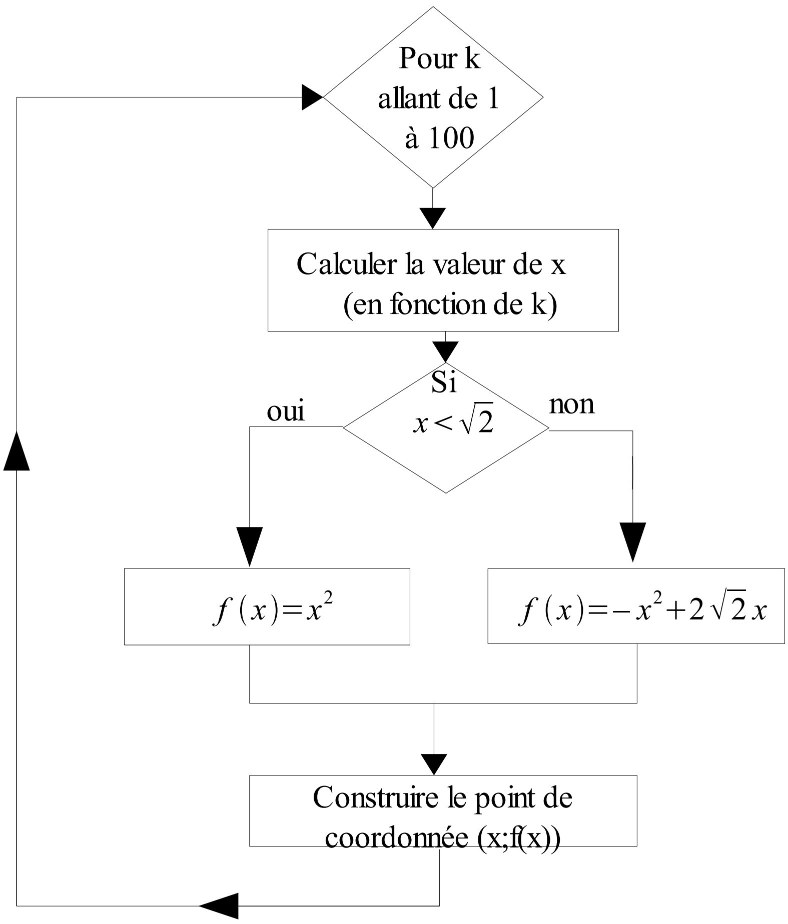
2) Si M∈[AO] :

- Dans le triangle ABD rectangle en A d'après Pythagore : $DB^2=AD^2+AB^2$ donc $DB^2=2\sqrt{(2)}$
- (DO)//(MP) donc d'aprés Thalès $\frac{AM}{AO}=\frac{AP}{AD}=\frac{PM}{DO}$ donc $\frac{x}{\sqrt{(2)}}=\frac{AP}{AD}=\frac{PM}{\sqrt{(2)}}$ donc $PM=x$
- $A_{APQ}=\frac{PQ\times AM}{2}=\frac{2x\times x}{2}=x^2$

Si M∈[OC]

- $CM=AC-AM=2\sqrt{(2)}-x$
- (DO)//(MP) donc d'aprés Thalès $\frac{CM}{CO}=\frac{CP}{CD}=\frac{PM}{DO}$ donc $\frac{2*\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}=\frac{CP}{CD}=\frac{PM}{\sqrt{2}}$ donc $PM=2\sqrt{2}-x$
- $A_{APQ}=\frac{PQ\times AM}{2}=\frac{2(2\sqrt{(2)}-x)\times x}{2}==-x^2+2\sqrt{2}\times x$

3)



4) Remarque: pour entrer en mode programme, on peut utiliser le raccourci clavier alt+p
Pour exécuter le programme, taper A() en mode normal .

La variable pt est en fait une liste, vide au départ (=NULL), que l'on va remplir avec tous les points, pour pouvoir tous les afficher ensemble. Sans cette astuce, le logiciel affiche un point, puis efface, puis un autre, ...

5)

```
A(a):={local k,x,f,pt; pt:=NULL;
 pour k de 0 jusque a faire
 x:=0+k*2*sqrt(2)/a;
 si x<sqrt(2) alors f:=x² sinon f:=-x²+2*sqrt(2)*x fsi;
pt:=pt,point(x,f); fpour;
 affichage pt;}
```

Remarque : au dessus de 200 points, le temps est trop long (sur les ordinateur du lycée ...)

6) x²=1 ⇔ $x^2-1=0$ ⇔ $(x-1)(x+1)=0$ ⇔ $x=1$ ou $x=-1$, seule la réponse x=1 est dans l'intervalle $[0;\sqrt{2}]$

7) $-x^2+2\sqrt{2}x=1$ ⇔ $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ ⇔ $x^2-2\sqrt{2}x+2-1=0$ ⇔ $(x-\sqrt{2})^2-1=0$ ⇔ $(x-\sqrt{2}+1)(x-\sqrt{2}-1)=0$ ⇔ $x=\sqrt{2}-1$ ou $x=\sqrt{2}+1$, seule la réponse $x=\sqrt{2}+1$ est dans l'intervalle $[\sqrt{2};2\sqrt{2}]$.

Remarquons que pour factoriser, on a d'abord « reconnu » le début d'une identité remarquable $(a^2-2ab+b^2)$, qu'on ensuite compléter puis on a fait apparaître l'identité a^2-b^2 ... Grâce à Xcas, cette étape pouvait être éviter : il suffisait de développer l'expression donner par le logiciel : $-(x-\sqrt{2}+1)(x-\sqrt{2}-1)=...=-(x^2-2\sqrt{2}x+1)$

8) Par lecture graphique, le maximum semble être égale à 2 et être atteint en x= $\sqrt{2}$.
Pour le prouver, pour tout $x\in[0;2\sqrt{2}]$, montrons que $A(x)\leqslant 2$.
Cela revient à résoudre les inéquations
a) $x^2\leqslant 2$ ⇔ $x^2-2\leqslant 0$ ⇔ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\leqslant 0$ ⇔ x∈ $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ (tableau de signe)
donc si $x\in[0;\sqrt{2}]$ alors $A(x)\leqslant 2$
b) $-x^2+2\sqrt{2}x\leqslant 2$ ⇔ $x^2-2\sqrt{2}x+2\geqslant 0$ ⇔ $(x-\sqrt{2})^2\geqslant 0$ ⇔ x∈ℝ
donc si $x\in[\sqrt{2};2\sqrt{2}]$ alors $A(x)\leqslant 2$

Comme on a également que $A(\sqrt{2})=2$, le maximum est bien égale à 2 et est atteint pour $x=\sqrt{2}$

<u>Conclusion:</u> Avec Géogébra, on peut conjecturer la valeur du maximum et des valeurs approchée à 0,01 prés des x_1 et x_2 .

Le tracé de la courbe ou l'utilisation du tableau de valeur de la calculatrice nous permet d'obtenir des valeurs approchée à 0,001 prés des x_1 et x_2 (ou plus précis).

La courbe aurait pu être obtenue avec Géogébra d'une autres manières :

- définir une variable (noté l) égale à la longueur AM (taper l=longueur[A,M])
- définir une variable (noté r) égale à l'aire du polygone AP_1Q_1 (taper $r=Aire[AP_1Q_1]$)
- définir une variable (noté t) égale à l'aire du polygone AP_2Q_2 (taper $t=Aire[AP_2Q_2]$)
- Construire un point L de coordonnée $(l;r)$ (taper $L=(l;r)$)
- Construire un point N de coordonnée $(l;t)$ (taper $N=(l;t)$)
- Cliquer droit sur le point L et activer la trace, idem pour N.
- ou taper y=x² puis y=-x²+2*sqrt(2)*x

De même dans Xcas on peut taper :

graphe(x²,x=0..sqrt(2));graphe(-x²+2*sqrt(2)*x,x=sqrt(2)..2*sqrt(2))

Seul le calcul permet de prouver et donc de répondre aux questions 1 et 3 avec rigueur. Une conjecture ou un dessin ne sont pas des preuves ...