Fonction polynôme

1)Étude de la fonction carré:

→ Donner une définition de cette fonction.
→ Construire la courbe représentative de cette fonction sur $[-4;4]$.
→ Montrer que cette fonction est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.
→ Cette fonction possède-t-elle un extrémum ? Justifier la réponse.
→ Construire le tableau de variation de la fonction carré.
→ La courbe représentative de la fonction carré possède une élément de symétrie. Lequel ? Pour le prouver, on pourra choisir un point M d'abscisse x quelconque sur la courbe et montrer que son symétrique M' est aussi un point de la courbe. *(aide : se demander ce que signifie pour ses coordonnées qu'un point est sur la courbe carré ...)*

2)Fonction associées sur Géogébra :

On construit trois curseurs p,m et n entre -5 et 5.
On construit la courbe représentative de $f(x)=p[(x-n)^2+m]$.
Placer les curseurs de manière a avoir f(x)=x².

→ En bougeant le curseur n, quel est l'impact sur la courbe?
→ En bougeant le curseur m, quel est l'impact sur la courbe?
→ En bougeant le curseur p, quel est l'impact sur la courbe?
→ Que se passe-t-il si $p<0$?

3)Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Un polynôme du second degré est une expression de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ ou a,b et c sont des nombres réels constants.

Pour étudier les variations d'une fonction polynôme de degré 2, ou résoudre une équation ou une inéquation, il est souvent utile d'utiliser la forme canonique, c'est a dire une expression de la forme $f(x)=p[(x-n)^2+m]$.

Pour trouver cette expression on peut utiliser le logiciel de calcul formel Xcas.

Remarque : en développant $f(x)=p[(x-n)^2+m]$ on peut facilement trouver des relation permettant de calculer m,n et p a partir de a,b et c. Il suffit d'identifier les coefficients .

Pour trouver la forme canonique on peut aussi: (méthode non exigible)

–factoriser $f(x)=ax^2+bx+c$ par a

–reconnaitre le début d'un carré.

–Compléter l'égalité puis simplifier

application : En utilisant la forme canonique :
1)Montrer $f(x)=2x^2+12x+16$ est croissante sur $[-3;+\infty[$
2)Résoudre $x^2-4x-8=0$
3)Montrer que f(x)=-5x²+30x+12 admet un maximum en $x=3$
4)Soit $f(x)=2(x-1)(x+5)$, donner un algorithme permettant de calculer f(x) en partant de la donnée d'un nombre x. Faire de même avec la forme canonique de f. Comparer.

4)Synthèse :

→ Donner et démontrer une propriété donnant les variations de $f(x)=p[(x-n)^2+m]$ (on fera une disjonction de cas : p<0 ou p>0)
→ Donner également, selon les cas l'extremum, l'axe de symétrie et l'orientation de la parabole.