Comportement asymptotique d'une suite

1) Suite ayant une limite infinie

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle du type $[A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;A]$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ (respectivement $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$)

2) Suite convergente

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit $\lim_{n\to+\infty} U_n=l$
Si la suite ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Montrer, en utilisant la définition, que :

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $u_n=\dfrac{1}{n+1}$ *est une suite qui converge vers* 0.

$(v_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $v_n=3\mathrm{n}+5$ *est une suite qui diverge.*

3) Limites

Les opérations sur les limites de suites ont les même propriétés que les opérations sur les limites de fonctions: addition, produit, quotient, composition.

Th: Soit f une fonction, (U_n) une suite et a et α deux réels ou + ou - ∞.
Si $\lim_{n\to+\infty} U_n=a$ et $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(U_n)=\alpha$.

ex : calculer $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{(\mathrm{e}^n-1)}$; $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2/n-1}$

Th: Lorsqu'une suite (U_n) est définie par $U_n=f(n)$, lorsque f possède une limite en +∞, alors la limite de (U_n) existe et $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

ex : calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n-n$; $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n+1}{3n^4+n+4}$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{(n+1)}-\sqrt{(n+1)}$; $\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Th: Quand une suite définie par une relation de récurrence du type $U_{n+1}=f(U_n)$ converge vers un réel l ou f est continue, alors $l=f(l)$.

4) Théorèmes de convergence:

Suites géométriques: $\lim_{n\to+\infty} q^n=\begin{cases} 0 & si\ q\in]-1;1[\\ +\infty & si\ q>1 \end{cases}$

Démonstration : pour démontrer que $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ si $q>1$, on pourra montrer par récurrence que pour $a>0$; $(1+a)^n\geqslant 1+na$ $\forall$ n ∈ ℕ

Conséquence : si (u_n) géométrique alors $\lim u_n=0$ si $q\in]-1;1[$ et (u_n) diverge si $q>1$.

ex: étudier la convergence des suites (u_n) *et* (v_n) *:* $u_n=2^n\times\frac{5}{3^n}$ et $v_n=3^n$.

5) Théorèmes de comparaison:

_Si $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si (u_n) et (w_n) convergent vers L alors (v_n) converge vers L . (théorème des "gendarmes")
Si $u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n=+\infty$ alors $\lim v_n=+\infty$.
Si $u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n=-\infty$ alors $\lim u_n=-\infty$

dem : utiliser la dem.

ex: étudier la convergence de la suite (u_n) *:* $u_n=\frac{n^2+\cos n}{n^2}$

Si une suite est croissante et converge vers l alors tous les termes de la suites sont inférieurs ou égaux à l .

dem : par l'absurde

6) Théorèmes de convergence monotone

Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors (u_n) converge.
Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors (u_n) converge.

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Ex: Démontrer que la suite (u_n) *définie par* $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *converge.*

Remarque : Montrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$