Démonstration par récurrence

a) Cas des suites :

Dans le cas d'une suite définie par récurrence en particulier, si on veut obtenir un résultat, on ne peut a priori pas faire autre chose que de prouver ce résultat par récurrence. C'est-à-dire que si la suite est définie 'de proche en proche' la démonstration se fera aussi de proche en proche.
Si l'objectif est de prouver que U_n <2 pour tout n , pour calculer U_{59} il faut calculer U_{58} , … et bien pour montrer que U_{59} <2 on montrer d'abord que U_{58} <2, …
La relation de récurrence présente dans la définition permettra de passer de U_n <2 à U_{n+1} <2 pour tout n ce qui permettra de prouver (avec n =58) que si U_{58} <2 alors U_{59} <2 .
Et pour montrer que U_{58} <2 me dite vous ? et bien avec n = 57, il suffirai de montrer que U_{57}<2, ….
Mais ce n'est que reculer pour mieux sauter, puisqu'il faudra bien un point de départ !
Il faudra donc aussi prouver que U_0<2 .
Résumons :
Je veux montrer que U_n <2 pour tout n ;

1) je montre que U_0 <2.
2) Je prouve que pour tout n , si U_n <2 alors U_{n+1} <2 .
3) On peut conclure que pour tout n , U_n <2 .

L'étape 1 est souvent appelé initialisation
A l'étape 2 on montre que la propriété est héréditaire (elle se transmet d'un entier n a son successeur n+1)
Et l'étape 3 ? la conclusion !

b) Autres cas :

Le principe d'une démonstration par récurrence ne s'applique pas qu'aux suites. On peut démontrer par récurrence une propriété P(n) quelconque.

ex : montrer que pour tout n 10 ; P(n) = ' 2^n 100n '

1) on montre que P(10) est vrai
2) On montre que si P(n) est vrai alors P(n+1) l'est aussi.
3) On conclut.

Remarque : pour l'étape 2, on suppose que la propriété P(n) est vrai (donc on peut s'en servir comme d'une hypothèse) et on démontre (par un calcul) que P(n+1) l'est aussi.

c) Exercices :

I) Montrer par récurrence sur n que

1) $$\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 = n^2$$

2) $$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

II) Soit la suite (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$

Montrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont égaux à 3 .

III) Démontrer que pour tout entier naturel n: $2^n > n$.

IV) Trouver l'erreur:

Soit à démontrer que pour tout entier naturel n , 10^n +1 est divisible par 9 .
Supposons que 10^n +1 est divisible par 9 et montrons que 10^{n+1} est divisible par 9, en effet :
$10^{n+1} = 10.10^n + 1 = (9+1)10^n + 1 = 9.10^n + 10^n + 1$

Or 10^n +1 est divisible par 9, il en est de même de $9.10^n + 10^n$ +1, donc 10^{n+1} +1 est divisible par 9, ce qui prouve le résultat annoncé.