Variables aléatoires

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini.

on définit une **loi de probabilité** sur Ω si on choisit des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que, pour tout i, $0 < p_i < 1$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$; p_i est la probabilité élémentaire de l'événement $\{a_i\}$ et on note $p_i = p(\{a_i\})$ ou parfois plus simplement $p(a_i)$.

pour tout événement E inclus dans Ω, on définit p(E) comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui définissent E.

Si les issues de l'expérience aléatoire sont des nombres réels, on peut définir les nombres suivants :

__l'espérance mathématique__ de la loi de probabilité est le nombre μ défini par :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\, a_i$$

__la variance__ de la loi de probabilité est le nombre V défini par : $V = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(a_i - \mu)^2$

__l'écart - type__ de la loi de probabilité est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.

__Exercice__ :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat « pile » et on perd 1 € pour chaque résultat « face ».

1. Quel est l'ensemble E des issues possibles ?
2. Soit X l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un gain de 3 € » ? On note cette probabilité $p(X = 3)$.

On obtient une nouvelle loi de probabilité sur l'ensemble des gains $E' = X(E) = \{-3 ;0 ;3 ;6\}$; nous la nommons **__loi de probabilité de X__** :

Gain a_i	$a_1 = -3$	$a_2 = 0$	$a_3 = 3$	$a_4 = 6$
Probabilité $p_i = p(X = a_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Dans cette exemple, il faut différencier trois éléments :

1) le résultat de l'expérience : l'ensemble E (par ex : Face – Face – Pile)
2) Le gain associé à cette expérience (Les valeurs a_i de l'ensemble X(E))
3) La probabilité associé à chaque issue (p_i)

On appelle **définir une variable aléatoire X** le fait d'associé à E des valeurs réels .
Attention : une variable aléatoire n'est pas un nombre unique .
Remarque : Pour une même expérience, on peut définir plusieurs variable aléatoire.
Pour schématiser, une variable aléatoire « transforme » le résultat d'une expérience en nombres réels (ce qui d'ailleurs permettra Certains calculs)

Définition :

Une **variable aléatoire** X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

X prend les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ définies par :

$$p_i = p(X = a_i).$$

L'affectation des p_i aux a_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité sur $E' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Cette loi, notée P ' ou P_X, est appelée **loi de X**.

Définition :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$.

On appelle respectivement **espérance mathématique** de X, **variance** de X et **écart-type** de X , l'espérance, la variance et l'écart - type de la loi de probabilité P_X de X.

Notation : E(X), Var(X) et σ(X)

EXERCICE 1 : Avec un dé

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables .
2) Calculer la probabilité des événements :

   A : « on obtient un double » ; B : « on obtient 2 numéros consécutifs »

   C : « on obtient au moins un 6 » ; D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

3) Dans une fête foraine, on propose le jeu suivant : le joueur mise 5€, lance deux fois de suite un dé équilibré . Dans le cas A il gagne 10€, dans le cas B il gagne 15€, dans tous les autres cas il ne gagne rien. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance correspondant à ce jeu.

EXERCICE 2 : Avec une pièce

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1) Dresser la liste des issues équiprobables.
2) Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?

   A : « 2 piles et 2 faces »

   B : « 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile ».

3) Dans une fête foraine, on propose le jeu suivant : le joueur lance fois de suite une pièce équilibrée. Dans le cas A il gagne 10€, dans le cas B il paye 15€, dans tous les autres cas il ne gagne ni ne perd rien. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance correspondant à ce jeu.

EXERCICE 3 :

Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.

1) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.
2) Le jeu est-il favorable au joueur ?