Dénombrement

I – Rappels

1. Un centre de loisirs accueille 100 enfants. Deux sports sont proposés : le football et le tennis.

A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.
Combien d'enfants n'aiment aucun des deux sports ?

*Indication : faire un **diagramme** résumant la situation*

2. On s'intéresse à la présence, sur les véhicules d'un parc automobile, des trois dispositifs de sécurité suivants : ABS, Air Bags, Correcteur de Trajectoire.

On sait que :

- 7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs
- 8 sont munis des trois
- tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité
- 305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins
- 298 véhicules disposent de l'ABS
- 428 véhicules disposent d'Air Bags
- 122 véhicules disposent des deux
- 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire.

Représenter ces données sur un diagramme.
Quel est le nombre total de véhicules de ce parc automobile ?
Quel est le nombre de véhicules de ce parc automobile disposant d'un et d'un seul dispositif de sécurité ?
Quel est le nombre de véhicules de ce parc automobile disposant d'au plus un dispositif de sécurité ?

3. La référence d'une cartouche d'encre est composée d'une lettre choisie dans l'ensemble $\{A;H;S;T\}$ et d'un chiffre de l'ensemble $\{1;3;5\}$.

Écrire et dénombrer toutes les références possibles.

*Indication : on pourra construire un **arbre** résumant la situation*

4. Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- d'une entrée à choisir parmi trois entrées possibles notées : E_1, E_2 et E_3.
- d'un plat à choisir parmi quatre plats possibles : P_1, P_2, P_3 et P_4.
- d'un dessert à choisir parmi quatre desserts possibles : D_1, D_2, D_3 et D_4.

Combien un client peut-il composer de menus différents ?
Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat P_2 ?
On choisit un client au hasard, quel est la probabilité qu'il ait un plat P_2 ?

Indication : construire l'arbre en détails n'est pas obligatoire, l'objectif est de dénombrer. Il peut suffire d'imaginer le début …

5. Combien y-a-t-il de main de 5 cartes possible dans un jeu de 32 cartes ?

II – Combinaisons

1. La notation factorielle

Définition :

n est un entier supérieur ou égal à 1. Le nombre factorielle n, noté $n!$, désigne le produit de tous les entiers naturels de 1 à n : $\boxed{n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$.

Par convention : $\boxed{0! = 1}$.

Exemple : $5! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$.

2. Combinaisons

Définition :

n et p désignent des entiers tels que $0 < p < n$ et E est un ensemble à n éléments.

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments.

On la note $\boxed{\binom{n}{p}}$.

Exemples :

$E = \{a; b; c; d\}$. La partie $\{a; b\}$ est une combinaison à 2 éléments de E. La partie vide $\varnothing$ est la seule combinaison à 0 élément de E.

Écrire toutes les combinaisons de 2 éléments de E, puis toutes celles de 3 éléments de E.

Compléter : $\binom{4}{0} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{1} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{2} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{3} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{4} = \ldots\ldots$.

Exercices :

1. Parmi n personnes, on choisit un comité de p personnes et dans ce comité un responsable.
   Déterminer de combien de façons, on peut le faire en utilisant chacune des méthodes suivantes :
   a) on choisit d'abord le responsable ;
   b) on choisit d'abord les p membres du comité.

2. **a)** En déduire que $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
   b) En appliquant plusieurs fois l'égalité précédente, démontrer que : $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Conclusion :

n et p désignent des entiers tels que $0 < p < n$. $\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Exercices :

1. Au loto national, un joueur coche 6 numéros sur une grille où figurent les nombres de 1 à 49.
   a) De combien de façons le joueur peut-il remplir sa grille ?
   b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E_1 : « le tirage ne comporte que des nombres pairs » ;
   E_2 : « le tirage comporte les numéros fétiches de Donald : 15 et 7 » ;
   E_3 : « un même numéro (au moins) est dans les deux tirages de samedi prochain »
   E_4 : « choisir les six bons numéros »

2. Une urne contient 4 boules rouges et 5 boules vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur.

   a) Expliquer pourquoi une issue de l'expérience aléatoire peut être représentée par une combinaison. Donner alors le nombre de cas possibles.
   b) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de couleur rouge.
   c) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de couleur différente.

3. Propriétés

Démontrer les propriétés suivantes :

a) **Pour tous entiers n et p tels que $0 < p < n$,** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

b) **Pour tous entiers n et p tels que $0 < p < n - 1$,** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Conséquence : **le triangle de Pascal**

On peut calculer les $\binom{n}{p}$ de proche en proche à l'aide du tableau.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1 =	1 =				
2	1 =	2 =	1 =			
3	1 =	**3 =**	**3 =**	1 =		
4	1 =	4 =	**6 =**	4 =	1 =	
5						

4. La formule du binôme

Démontrer, par récurrence, que pour tous nombres réels (ou complexes) a et b et pour tout entier naturel n non nul, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Exercices :

a) Développer $(x+2)^5$.

b) Calculer, en fonction de n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, pour tout $n > 1$.