

Efficacité d'un vaccin

Partie 1

Des tests destinés à mesurer l'efficacité du vaccin contre la probariole ont été réalisés auprès de 1000 volontaires. Parmi ceux-ci, 600 personnes ont été vaccinées et 400 ont reçu un placebo. On a ensuite inoculé le virus à l'ensemble des volontaires. Voici les résultats :

	Vaccinés	Non vaccinés	Total
Malades	120	180	300
Non Malades	480	220	700
Total	600	400	1000

On choisit au hasard une de ces personnes.

On note V l'évènement « la personne interrogée est vaccinée »

On note M l'évènement « la personne interrogée est malade »

1) Donner les valeurs de $P(V)$; $P(M)$; $P(V \cap M)$; $P(\bar{M})$; $P(V \cap \bar{M})$

2) Dans cette question on s'intéresse uniquement aux personnes vaccinées.

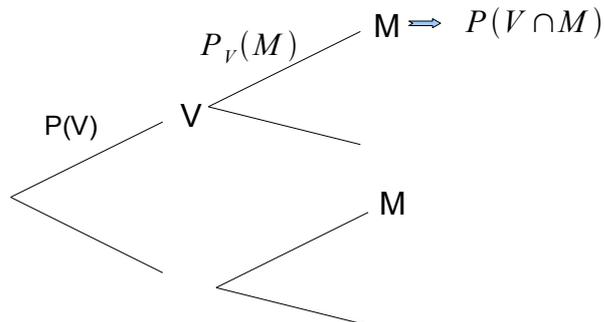
On note $P_V(M)$ la probabilité que la personne soit malade sachant qu'elle a été vaccinée.

Calculer $P_V(M)$ et comparer ce résultat à $\frac{P(V \cap M)}{P(V)}$.

3) Expliquer d'une phrase puis calculer le nombre $P_V(M)$.

4) Comparer $P_V(M)$ et $P(M)$ et interpréter ce résultat.

5) Compléter l'arbre ci dessous.



6) Comment retrouver la valeur de $P(M)$ en utilisant cet arbre ?

Partie 2

Certains vaccins peuvent avoir des effets secondaires indésirables. On a demandé aux 1000 personnes si elles avaient eu des maux de tête et des troubles gastriques.

	Vaccinés	Non vaccinés	Total
Maux de tête	90	60	150
Pas de maux de tête	510	340	350
Total	600	400	1000

On choisit au hasard une de ces personnes.

On note T l'évènement « la personne interrogée a des maux de tête »

On note G l'évènement « la personne interrogée a des troubles gastriques »

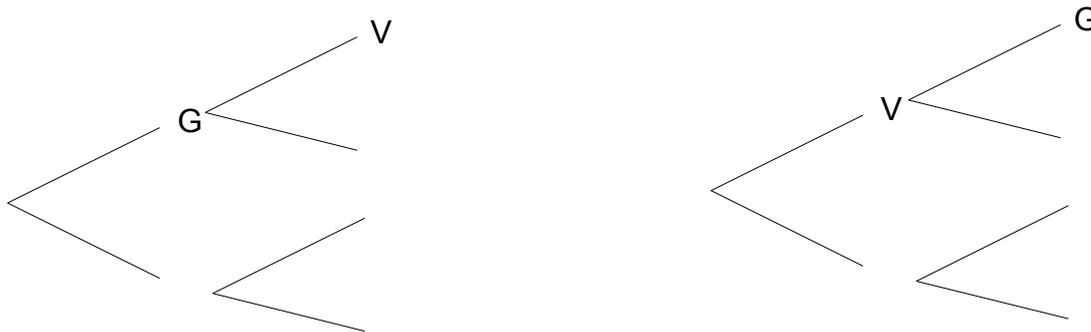
1) Calculer $P(T)$; $P(V \cap T)$; $P(\bar{V} \cap T)$

- 2) Utiliser une formule déduite de celle de la question 2 partie 1 pour calculer $P_V(T)$.
 3) Que signifie le nombre $P_V(T)$?
 4) Montrer que $P_V(T) = P_{\bar{V}}(T) = P(T)$.
 5) Peut-on considérer que les maux de tête sont un effet secondaire indésirable du vaccin?

Partie 3

3 personnes sur 10 ont eu des troubles gastriques et, parmi les personnes qui ont eu des troubles gastriques, $\frac{2}{3}$ étaient vaccinés .

1) Donner les valeurs de $P(G)$ et $P_G(V)$ et $P(V)$ puis placer ces valeurs sur les arbres pondérés suivant que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice .



- a) Calculer $P(\bar{G})$; $P_G(\bar{V})$; $P(V \cap G)$ (on remarquera que $P(V \cap G) = P(G \cap V)$)
 b) Utiliser la loi de probabilité totale pour calculer $P(V \cap \bar{G})$
 c) Calculer puis comparer $P_V(G)$; $P_{\bar{V}}(G)$ et $P(G)$.
 d) Peut-on considérer que les troubles gastriques sont un effet secondaire indésirable du vaccin?

Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(B) \neq 0$.

Définition :

La probabilité de A sachant que B est réalisé est le réel noté $P_B(A)$ défini par $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Propriété :

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) \text{ et } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Définition :

Les éléments B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de Ω lorsqu'ils sont tous non vides, deux à deux disjoints et recouvrent Ω .

Propriété : (loi de probabilité totale)

Si par $n \in \mathbb{N}^*$, B_1, \dots, B_n forme une partition de Ω alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \times P_{B_n}(A)$$

démonstration : Utiliser le fait que $A \cap B_1$ et $A \cap B_2$ et ... sont deux à deux incompatibles.

Application : $\{B, \bar{B}\}$ forment une partition de Ω donc ...

Définition :

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

si et seulement si $P(A) = P_B(A)$

si et seulement si $P(B) = P_A(B)$