Tangentes à deux courbes

Situation

Dans un repère orthonormal du plan, on considère les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions.
On désigne respectivement par M et N des points de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et par (T_1) et (T_2) les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en M et N.

Il s'agit d'étudier des propriétés géométriques de ces tangentes.

Compétences évaluées

Compétences TICE

– Représenter graphiquement des courbes et leurs tangentes en un point donné ;
– Émettre et tester des conjectures.

Compétences mathématiques

– Équation de la tangente en un point d'une courbe ;
– Techniques de géométrie analytique.

Tangentes à deux courbes

Énoncé

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormal du plan.

Soit a un nombre réel quelconque. On désigne respectivement par M et N les points de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'abscisse a et par (T_1) et (T_2) les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en M et N.

Les droites (T_1) et (T_2) coupent respectivement l'axe des abscisses en P et Q.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique (ou une calculatrice graphique) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites (T_1) et (T_2). Que peut-on remarquer pour les droites (T_1) et (T_2) ?

   Appeler le professeur pour lui montrer le graphique créé et lui indiquer la conjecture faite au sujet de (T_1) et de (T_2).

2. À l'aide du logiciel émettre une conjecture à propos de la longueur du segment $[PQ]$.

   Appeler le professeur pour lui présenter la conjecture et la démonstration envisagée.

3. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

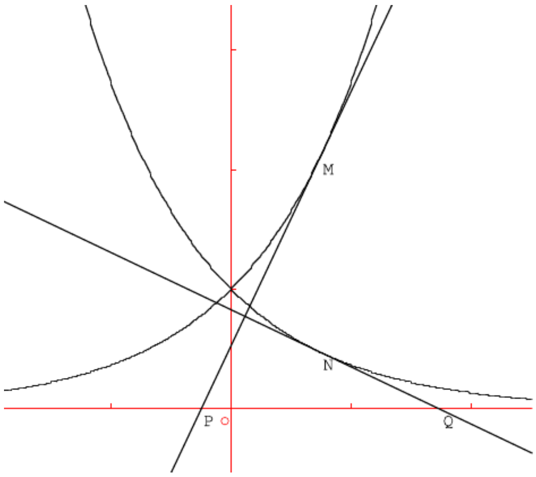
Production demandée

- Exposé oral de la méthode de construction de la figure adaptée à la situation ;
- Exposé oral des conjectures ;
- Exposé de la méthode choisie pour démontrer la dernière conjecture.

Tangentes à deux courbes

Énoncé

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal du plan.
Soit a un nombre réel quelconque. On désigne respectivement par M et N les points de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'abscisse a et par (T_1) et (T_2) les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en M et N.
Les droites (T_1) et (T_2) coupent respectivement l'axe des abscisses en P et Q.



1. Avec un logiciel de géométrie dynamique (ou une calculatrice graphique) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites (T_1) et (T_2). Que peut-on remarquer pour les droites (T_1) et (T_2) ?

Appeler le professeur pour lui montrer le graphique créé et lui indiquer la conjecture faite au sujet de (T_1) et de (T_2).

☞ *L'utilisation d'une calculatrice est plus complexe malgré ce que propose l'énoncé, et il faudra au candidat un bon sens de l'observation pour conjecturer sur ce type d'écran.*
Avec un logiciel de géométrie dynamique, s'assurer que le candidat sait définir et utiliser un paramètre et au besoin lui indiquer une procédure.
La conjecture attendue est ici celle liée à l'orthogonalité des deux tangentes.
Selon le logiciel utilisé, le tracé des tangentes peut être plus ou moins aisé (existence d'une fonctionnalité « tangente » ou non) ; au besoin, on pourra mettre le candidat sur la voie du tracé par point et coefficient directeur.

2. À l'aide du logiciel émettre une conjecture à propos de la longueur du segment $[PQ]$.

Appeler le professeur pour lui présenter la conjecture et la démonstration envisagée.

☞ *La conjecture attendue est ici celle liée à la longueur constante du segment.*
L'éventuel candidat travaillant avec une calculatrice peut être ici en difficulté.
Prendre en compte le fait qu'un candidat ayant tracé les tangentes comme graphes de fonctions affines sera gêné dans la construction des points P et Q.
Lui proposer de redéfinir les objets ou d'émettre une conjecture sans avoir placé les points P et Q.
Amener le candidat à présenter sa démarche de démonstration avant de se lancer dans la réalisation.

3. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Production demandée

– Exposé oral de la méthode de construction de la figure adaptée à la situation ;
– Exposé oral des conjectures ;
– Exposé de la méthode choisie pour démontrer la dernière conjecture.

Compétences évaluées

Compétences TICE

– Représenter graphiquement des courbes et leur tangente en un point donné ;
– Émettre et tester des conjectures.

Compétences mathématiques

– Équation de la tangente en un point d'une courbe ;
– Techniques de géométrie analytique.

Numéro du sujet : 006 **Titre : Tangentes à deux courbes**

Nom Prénom : **NOTE :**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante :
La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note finale.
La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation …) représentera le quart restant.
La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement prise en compte de façon substantielle.
Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise.

Les exemples cités ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève*** *(à remplir par l'examinateur)*
L'élève est capable, avec une aide éventuelle, de construire les courbes et les tangentes.	
En exploitant les fonctionnalités du logiciel, l'élève est capable d'émettre des conjectures au sujet des tangentes et de la longueur du segment [PQ].	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.	
L'élève est capable de concevoir une démarche pour prouver que le segment [PQ] a une longueur constante.	
L'élève est capable de mettre en œuvre cette démarche : détermination des équations des tangentes, calcul des abscisses de P et Q, calcul de la longueur du segment [PQ].	

Autres observations :