

## Suites associées

### Situation

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbf{R} \\ a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 \in \mathbf{R} \\ b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels donnés.

On cherche à déterminer, pour des valeurs particulières de  $\alpha$  et de  $\beta$ , si ces deux suites sont convergentes et à calculer leur limite.

---

### Compétences évaluées

#### Compétences TICE

- Élaborer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

#### Compétences mathématiques

- Connaître les résultats relatifs aux suites géométriques ;
  - Calculer la limite d'une suite convergente.
-

## Suites associées

### Énoncé

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite  $(a_n)$  et à celle de la suite  $(b_n)$ ?

Appeler l'examineur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = b_n - a_n.$$

- (a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
- (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

- (c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examineur.

Appeler l'examineur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4.
  - (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).
  - (b) Déterminer les expressions de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

---

### Production demandée

- Construction de la feuille de calcul complète ;
- Formulation orale des conjectures ;
- Réponses argumentées à la question 4.

## Suites associées


### Énoncé

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite  $(a_n)$  et à celle de la suite  $(b_n)$  ?

Appeler l'examineur pour vérifier les calculs et les conjectures.


 Vérifier les formules utilisées et, avant de valider les réponses, demander au candidat s'il a mis ou pourrait mettre en place une procédure de contrôle.

3. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = b_n - a_n.$$


- (a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
- (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

 Si le candidat n'a pas vu le caractère géométrique des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , ou s'il n'a pas d'idée pour la vérification expérimentale, ne pas hésiter à suggérer le calcul des rapports  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

- (c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examineur.

Appeler l'examineur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

 Si le candidat n'a pas de méthode prévue, on peut lui en suggérer une pour le démarrage.

4. (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).  
(b) Déterminer les expressions de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .  
(c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

☞ On considère qu'un candidat qui a trouvé les expressions de  $a_n$  et  $b_n$  et les limites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$  – même après un questionnement de l'examineur – a rempli son contrat.

---

### Production demandée

- Construction de la feuille de calcul complète ;
  - Formulation orale des conjectures ;
  - Réponses argumentées à la question 4.
- 

### Compétences évaluées

#### Compétences TICE

- Élaborer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

#### Compétences mathématiques

- Connaitre les résultats relatifs aux suites géométriques ;
  - Calculer la limite d'une suite convergente.
-

**Numéro du sujet : 007****Titre : Suites associées****Nom Prénom :****NOTE :**

*On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante :*

*La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note finale.*

*La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation ...) représentera le quart restant.*

*La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examineur sera globalement prise en compte de façon substantielle.*

*Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maîtrisée pour être considérée comme acquise.*

*Les exemples cités ci-dessous ne sont pas exhaustifs.*

<b>Compétences évaluées</b>	<b>Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examineur)</b>
<i>L'élève est capable de calculer des termes successifs de suites à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.</i>	
<i>L'élève est capable d'émettre des conjectures :</i> - <i>quant à la nature, la convergence et la limite éventuelle des suites <math>(a_n)</math> et <math>(b_n)</math> ;</i> - <i>quant à la nature des suites <math>(u_n)</math> et <math>(v_n)</math>.</i>	
<i>L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.</i>	
<i>L'élève est capable de prendre des initiatives : étude de la nature des suites <math>(u_n)</math> et <math>(v_n)</math>, détermination des expressions de <math>a_n</math> et <math>b_n</math> en fonction de <math>n</math>, ...</i>	
<i>L'élève a des connaissances sur les suites géométriques.</i>	
<i>L'élève est capable de déterminer les expressions de <math>a_n</math> et <math>b_n</math> en fonction de <math>n</math>.</i>	

**Autres observations :**