Logarithmes Népérien

On a vu que la fonction exponentielle : $x \to e^x$ réalisait une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc pour tout réel strictement positif x il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^y$. Ce nombre est appelé logarithme népérien de x et est noté $\ln(x)$

On défini ainsi de $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Propriétés : $\ln(e) = 1$; $\ln(1) = 0$

Si a $\in \mathbb{R}^+$; b$\in \mathbb{R}^{+*}$; n $\in \mathbb{Z}$ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^n) = n\ln(a)$ $\ln(\sqrt{(a)}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Dem : Utiliser comme pré requis les propriétés de la fonction exponentielle.

Relation fonctionnelle: Les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}^{+*}$telles que, pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $f(ab) = f(a) + f(b)$ sont les fonctions $x \to k\ln(x)$; $k \in \mathbb{R}$

Propriétés: $x \to \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $x > 0$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

dem: On admet que $\ln$ *est dérivable et on utilise* $(g(u))' = u'g'(u)$

Propriétés: $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

dem: Utiliser la définition d'une limite pour la première, puis le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ *pour la seconde et enfin pour la troisième un nombre dérivé. Construire le tableau de variation puis la courbe représentative de la fonction* $\ln$

Propriétés: *Si* $x > 0$ *et* $y > 0$ $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$ et $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$

Propriétés: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ *et* $\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

dem:On fait les changements de variable $y = \ln(x)$ *et* $X = \frac{1}{x}$

Complément : Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Def : Pour tout $x > 0$; on défini $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ le logarithme décimale de x.

- *Montrer que la fonction* $\log$ *vérifie les même propriétés que la fonction* $\ln$.
- *Calculer* $\log(10^n)$. *Donner la fonction réciproque de* $\log$.
- *L'échelle de Richter donne la magnitude* M *d'un séisme d'après une échelle logarithmique (on calcul* $M = \log\left(\frac{F}{a}\right)$ *avec* a *une constante,* F *la force). Comparer les forces de séismes de force 5 et 8 sur l'échelle de Richter.*