Limites de fonction

Notation : ∀ remplace « quelque soit » et ∃ remplace « il existe »

A) En utilisant les définitions:

Def: Dire qu'une fonction a pour limite un réel l en $+\infty$ signifie que, toute ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Méthode : Démontrons, en utilisant cette définition que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$.

- Faire un dessin.
- Prendre un ouvert contenant $l=0$. L'idée est que celui-ci puisse devenir aussi petit que voulue. C'est pourquoi on va choisir de nommer cette intervalle $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$; ε étant un nombre quelconque aussi petit que l'on veut. (Remarque : $0\in]-\varepsilon\,;\varepsilon[$).
- Il faudra que $f(x)\in]-\varepsilon\,;\varepsilon[$ donc $-\varepsilon<\frac{1}{x-2}<+\varepsilon$. Si on ne connait pas le signe, on ne peut pas composer par la fonction inverse . Heureusement, on sait que dés que $x>2$; $f(x)>0$. Donc $0<\frac{1}{x-2}<+\varepsilon \Leftrightarrow x-2>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x>2+\frac{1}{\varepsilon}$.
- Ainsi dés que $x>2+\frac{1}{\varepsilon}$, on a $f(x)\in]-\varepsilon\,;\varepsilon[$.
- Une rédaction : « Soit $\varepsilon>0$; ∃ A∈IR (A= $2+\frac{1}{\varepsilon}$) tel que si x>A alors $0<\frac{1}{x-2}<+\varepsilon$ et donc $f(x)\in]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$. »

Démontrer de même que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+2}=1$ *, que* $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-7}{x-3}=2$ *et que* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x-1}}=0$.

Def: Dire qu'une fonction f à une limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $[A;+\infty[$ contient toute les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Méthode : Ce que l'on démontre : ∀ $A>0$; ∃ $B>0$ tel que si $x>B$ alors $f(x)>A$.
- Faire un dessin.
- Soit $A>0$; $f(x)>A \Leftrightarrow$ ....
- On rédige.

Démontrer que $\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2=+\infty$ *,que* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}=+\infty$ *et que* $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

Remarque : On peut adapter ces définitions en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

B) Limite en un réel a

On retrouve des définitions semblable dans le cas de limites en un réel:

Def: Dire qu'une fonction f à une limite l ∈IR en a ∈IR signifie que $f(x)$ peut être aussi proche de 1 que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de a .

($\lim_{x\to a}f(x)=l \Leftrightarrow \forall\ m>0$; $\exists\varepsilon>0$ tel que si x $\in]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$, alors $f(x)\in]l-m;l+m[$)

Donner la définition dans le cas d'une limite infinie en un réel:

Remarque:Dans le cas d'une limite en un réel, elle peut être à droite ($x<a$) ou à gauche ($x>a$)

Def : Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a

Si $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$; on dit que la fonction est continue en a

f est continue sur un intervalle I quand f est continue en tous points de I

Prop: Les fonctions usuelles (polynôme; racines carrée; fonctions rationnelles; trigonométriques; exponentielle; logarithme; ...) sont continues sur chacun des intervalles ou elles sont définies.
Les sommes; différences; produit; quotient; composée de fonctions continues sont continues.

Rq : On peut « prolonger par continuité » certaines fonctions.

Ex: La fonction $f: x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0. Mais $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}=1$. Il semble donc naturel de prolonger f par le point $(0;1)$. On obtient une nouvelle fonction: $\begin{cases} g(x)=f(x) \; si \; x\neq 0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

Prolonger par continuité la fonction $f \rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ *en* $x=1$.

C) En utilisant des formules :

Le principe est de comprendre la manière dont a été construite la fonction à partir de fonction élémentaires (dont on connait la limite dans le cour)

Ex : La fonction $x \rightarrow (x+2)e^{x+1}$ *c'est la composée des fonctions* $x \rightarrow x+1$ *et* $x \rightarrow e^x$ *que l' on va multiplier par la fonction* $x \rightarrow x+2$.

Ensuite on cherche à appliquer les réglés:

$\lim x \to a f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (fg)(x)$	$\ell.\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	FI	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Théorème : Soit a ; b et c trois nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim_{x\to a} g(x)=b$ et $\lim_{x\to b} h(x)=c$ alors $\lim_{x\to a} h(g(x))=c$.

ex : calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+1}$; $\lim_{x\to+\infty} e^{2x^2+2x-7}$

Dans certains cas; ces résultats ne suffisent pas: C'est le cas des formes indéterminée. Il faut alors « lever l'indétermination ». Une méthode consiste à modifier l'expression de départ en factorisant par le terme prépondérant :

ex: calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}$; $\lim_{x\to+\infty} e^x-2x+5$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+3x-4}{(e^x+x)^2}$

Lorsque le terme prépondérant n'est pas évident (ex : $\sqrt{x^2-2x}-x$ en $+\infty$) on peut penser à une 'quantité conjuguée'.

Une troisième méthode consiste à utiliser la définition du nombre dérivé :

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

D Limites et ordre :

Théorème des gendarmes : Soit f, g et h trois fonctions telles que pour tout x assez proche de a (avec a un réel, ou $+\infty$; ou $-\infty$), on ait : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(h)$.
Si de plus $\lim_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim_{x\to a} g(x)=l$

Démontrons la propriété dans le cas $a=+\infty$.

- *Rappeler les définitions de* $\lim_{x\to a} f(x)=l$ *et* $\lim_{x\to a} h(x)=l$ *et* $\lim_{x\to a} g(x)=l$.
- *Bien repérer hypothèses et conclusions.*
- *Rédiger.*

Montrer que $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ *;* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\cos(x)}=0$

Théorème de comparaison : Soit f et g deux fonctions vérifiant que pour tout x assez voisin de a (avec a un réel, ou $+\infty$; ou $-\infty$), on ait $f(x) \leqslant g(x)$:

- Si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim_{x\to a} g(x)=l'$ alors $l \leqslant l'$
- Si $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$
- Si $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

Démontrons les propriétés dans le cas $a=+\infty$.
Pour le premier point, en appliquant les définitions, on peut raisonner par l'absurde.
Les deux points suivants découle directement de la définition.

Ex :montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^2(2+\cos(x))=+\infty$ *; calculer* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3-\sin(x)}$ *;* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}+\cos(x)$

Ex : Montrer que la droite $y=x$ *est asymptote à la représentation graphique de la fonction la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=\frac{x^2+10\cos(2x)}{x}$