Intégration

1) Primitive :

Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que, pour tout x ∈ I , $F'(x)=f(x)$.

Remarque : toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. C'est donc le cas de toutes les fonctions étudiées en terminale.

Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les fonctions x → F(x) + k, avec k ∈ ℝ, sont des primitives de f sur I.
Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe k ∈ ℝ tel que, pour tout x ∈I, G(x)=F(x)+k.

Ex : démontrer ces propriétés.

Remarque : On parlera donc de l'ensemble des primitives de f sur I.

Si f est une fonction ayant des primitives sur un intervalle I, x_0 ∈ I et y_0 ∈ ℝ, alors il existe une unique primitive de f telle que $F(x_0)=y_0$.

Ex : démontrer cette propriété .
Application : à partir du formulaire de dérivées, obtenir un formulaire de primitives.
Application : Pour chacune des fonctions suivantes définies sur I, donner une primitive de f sur I, puis toutes les primitives de f sur I, puis la primitive F de f sur I telle que F(1) = 2 .

a) $f(x)=5x-3$
b) $f(x)=4x^3+3x^2-2x+1$
c) $f(x)=5x^2+x-4$
d) $f(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}$
e) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^3+1)^2}$
f) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+6}$
g) $f(x)=(2x+1)(x^2+x+6)$
h) $f(x)=(x^3+4x-5)^3(3x^2-4)$
i) $f(x)=(x-3)^5$
j) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$
k) $f(x)=3x^2-\dfrac{5}{\sqrt{x+1}}$
l) $f(x)=\dfrac{x^6+x^3}{x^2}$

2) Intégrale d'une fonction continue :

Si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ (avec $a<b$) , de représentation graphique Cf dans un repère orthogonale, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (= l'intégrale de f sur [a;b]) est l'aire sous la courbe Cf (= l'aire comprise entre $y=0$; $x=a$; $x=b$; et Cf)

Dans le cas d'une fonction positive, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$ (ou =0 si $a=b$)

Dans le cas d'une fonction négative $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$ sera un nombre négatif.

Enfin dans le cas d'une fonction continue qui change de signe un nombre finie de fois sur [a;b], l'intégrale de f sur $[a;b]$ est la différence entre la somme des aires correspondant aux intervalles ou f est positive et la somme des aires correspondant aux intervalles ou f est négative, exprimées en unités d'aire.

Par convention $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)dx\,\mathrm{d}x$.

Def : On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement la valeur moyenne d'une fonction positive .

3) Propriétés:

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ ($a<b$) et $k\in\mathbb{R}$ et c $\in$ $[a;b]$

Linéarité : $\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Ordre : Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$

Si $f\geqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Inégalité de la moyenne : Si pour tout x $\in[a;b]$, on a $m\leqslant f(x)\leqslant M$ alors :

$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$

Illustrer graphiquement ces propriétés.

4) Primitives et intégrales:

Th : Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, et a un point de I. Pour tout x $\in$ I, on pose :
F(x)= $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

dem : *On suppose de plus que f est croissante sur I. Soit x $\in$ I et h tel que $x+h\in I$.*

On fait une disjonction de cas : h>0 ou ..

Montrer que $f(x)\leqslant\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)$

Puis que F est dérivable en x (en utilisant la définition) . conclure.

Th : Si f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I, a $\in$I et b $\in$I.
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$ (on note aussi $[F(x)]_a^b$ le nombre $F(b)-F(a)$)

dem : A partir d'une primitive G définie comme au th précédent, On a deux primitives d'une même fonction donc ...