La fonction exponentielle

L'équation différentielle $y'=y$ admet sur ℝ une unique solution telle que $y(0)=1$. Cette solution est une fonction f dérivable sur ℝ, qui ne s'annule pas et telle que, pour tout x ∈ℝ on a $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$. De plus pour tout x ∈ℝ, $f(x)>0$.

Dem : l'existence est admise . Précisons que $(f(-x))'=-f'(-x)$
On pose pour tout réel x, $F(x)=f(x)f(-x)$. *Dériver F et montrer que F est constante égale à 1.*
Pour montrer l'unicité, On part d'une fonction g *vérifiant les mêmes propriétés que* f. *Ensuite on pose une fonction* $T(x)=g(x)f(-x)$ *En montrant que la fonction* T *est constante, on prouve que f et g sont une seule et même fonction.*
Enfin la continuité de f *permet de montrer que* f *est positive.*

On appelle fonction exponentielle (noté $\exp$) l'unique fonction définie sur ℝ et solution de l'équation différentielle $y'=y$ avec la condition initiale $y(0)=1$.

Théorème : Pour tout réels a et b, $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

Dem :Pour a *fixé, on pose* $f(x)=\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$ *pour tout x ∈ℝ .Vérifier que f est constante.*

Théorème: Pour tout a ∈ℝ ; b ∈ℝ et n ∈ℕ;, $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ et $\exp(na)=(\exp(a))^n$

Notation : on appelle e le nombre exp(1). On a e ≈2,718

En remarquant que pour tout n ∈ ℕ on a $\exp(n)=(\exp(1))^n=e^n$ et en étendant cette notation à ℝ :

Notation : Pour tout x ∈ℝ, exp(x) peut être noté e^x.

Rappeler toute les propriétés de la fonction exp en utilisant cette notation.

Théorème: La fonction $x \to e^x$ est strictement croissante sur ℝ,

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

dem: On pose $g(x)=e^x-x$ *; montrer que* $g(x)$ *est croissante et positive. Utiliser un théorème de comparaison . Pour la deuxième limite, poser* $X=-x$. *Pour la troisiéme, on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle.*

Construire le tableau de variation de la fonction x → e^x *puis sa courbe et son asymptote.*

Conséquences : La fonction exponentielle est une bijection de ℝ sur $ℝ^{+*}$.
Pour tout réels x et y on a: $x=y \Leftrightarrow e^x=e^y$ et $x<y \Leftrightarrow e^x<e^y$

Complément : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

dem: On a vue que $e^{x/2}>\dfrac{x}{2}$, *soit en élevant au carré* $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{4}$ ...

Complément : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, alors $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x\in I$, $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.