ETUDE D'UNE FONCTION LN

Partie A

Soit g une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln(x) + c$

Où a, b, c sont trois réels.

Déterminer a, b, c sachant que la courbe représentative de g passe par les points A(1 ;2) , B(e ;0) et C(e^3 ;2)

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln(x) + 2$

On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) (d' unité : 1 cm en abscisses et 4 cm en ordonnées)

1. Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$
2. Vérifier que $f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2$ puis déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x}$. Etudier le signe de f' puis établir le tableau de variations de f.
4. Calculer les solutions exactes dans $]0 ; +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$.en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse e.
6. Tracer dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) la tangente T ainsi que courbe Γ

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 7x$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$

b. Calculer en cm² l'aire du domaine limité dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) par la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$ (On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près) Hachurer sur le graphique l'aire calculée