# La méthode d'Euler

Considérons une fonction $f$, dérivable, solution d'une équation différentielle avec condition initiale ( $E$ ).

Si on peut résoudre cette équation, on connait la fonction solution et sa courbe.

Dans le cas contraire, la méthode d'Euler permet de construire une approximation de la courbe C*f*.

Prenons l'exemple de la fonction exponentielle: Si votre calculatrice ne faisait pas tous le travail, comment pourrions nous obtenir une approximation de la courbe $Cf$ sur $[0;1]$ et une valeur approchée de $e^1$. Rappelons que la fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $f'=f$ avec $f(0)=1$

Cette méthode repose presque exclusivement sur la formule de l'approximation affine de f en x : $f(x+h) \approx f(x)+hf'(x)$ ( pour h assez petit )

On va utiliser cette formule successivement $n$ fois. Dans notre exemple, choisissons de faire 10 étapes. On va donc, à partir de $f(0)$ et $f'(0)$ calculer $f(0{,}1)$ La valeur de $h$ est donc $h=0{,}1$ . h s'appelle le pas. Ensuite on calcule $f(0{,}2)$ a partir de $f(0{,}1)$ et $f'(0{,}1)$ (obtenue grâce à l'équation différentielle) ...

$f(0{,}1)=f(0)+hf'(0)=1+0{,}1\times 1=1{,}1$ et $f'(0{,}1)=f(0{,}1)=1{,}1$
$f(0{,}2)=f(0{,}1)+h\times f'(0{,}1)=1{,}1+0{,}1\times 1{,}1=1{,}21$ et ,,,,

*Le choix du pas est important: Il doit être petit pour que la formule d'approximation affine soit valide, mais pas trop pour ne pas multiplier les calculs (et les risques d'erreurs d'approximation).*

*L'informatique va nous aider: avec un tableur, on va construire le tableau suivant :*

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | N (étape) | x | f(x) (et f'(x)) | Pas h= |
| 2 | 0 | 0 | | 0,1 |
| 3 | | | | |
| .... | ... | ... | ... | |
| 12 | | | | |

1) *Trouver la formule en A3 pour qu'après copier-coller on ait 10 en A12.*
2) *Trouver la formule en B3 pour qu'après copier-coller on ait 1 en B12 mais que si on modifie la valeur du pas de la cellule D2, cette colonne soit modifié.*

*Indication : la formule* =3*A3 *devient par copier-coller vers le bas* =3*A4 *puis ....*
*la formule* =A2*B$3 *devient par copier-coller vers le bas* =A3*B$3 *puis ...*

3) *Trouver la formule en C3 puis qu'après copier-coller .*
4) *Construire la courbe et noté la valeur approchée de* $e$ *obtenue.*
5) *Modifier le tableau pour obtenir la courbe et noté la valeur approchée de* $e$ *avec un pas h=0,01 puis avec un pas h=0,001. Noter ces valeurs.*

*Reprendre l'exercice avec ( E ) :* $y'=1-y^2$ *et* $y(0)=0$ *. On pose* $g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

*Montrer que* $g$ *est solution de ( E ). Quel pas faut-il pour avoir* $f(1)-g(1)<10^{-3}$ *?*