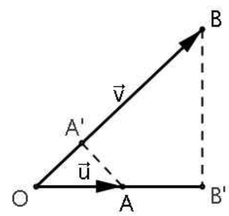
Produit scalaire dans le plan

1) Différentes expressions du produit scalaire :

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ ou encore $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$.

Soient les points A, B et O tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Soient A' et B' les projetés orthogonaux respectivement des points A et B sur les droites (OB) et (OA).
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$.



Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans un repère orthonormé alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.

Remarques :

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors :
  $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|u\|\times\|v\|$ s'ils sont de même sens ou $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|u\|\times\|v\|$ s'ils sont de sens contraires.
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2=\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^{\,2}$.

Ex 1: Soit ABCD un rectangle tel que AB=4 et AD=3.
Soit A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD).
1) En exprimant $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ de deux manières montrer que $\widehat{ABD}$ ≈0,64 rad.
2) En exprimant $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ de deux manières montrer que A'C'=1,4 (on pourra utiliser la relation de Chasles)
3) Même si l'énoncé ne le suggère pas, il est toujours possible de se placer dans un repère orthonormé . Trouver une troisième manière de calculer les deux produit scalaires précédents.

2) Propriétés :

➢ Pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k\in\mathbb{R}$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(k\vec{u})\cdot v=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}$

➢ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

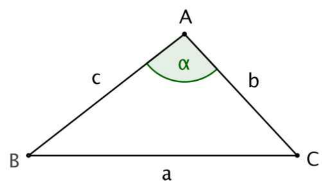
3) Applications :

Théorème de la médiane :

Soient A et B deux points quelconques du plan. I est le milieu du segment $[AB]$.
Alors pour tout M, $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

Théorème d'Al-Kashi (ou de « Pythagore généralisé ») :

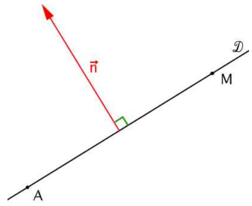
ABC est un triangle tel que $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ et $\widehat{BAC}=\alpha$.
On a : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$



Ex : Pourquoi l'appelle-t-on aussi théorème de « Pythagore généralisé » ?
Ex : Retrouver le résultat de l'ex 1 question 1 avec le théorème d'Al-Kashi.

4) Équations de droites et de cercles dans le plan :

(Les définitions et propriétés qui suivent sont énoncés dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.)



- Un vecteur normal d'une droite D est un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs directeurs de D.
- Soit A un point appartenant à D et $\vec{n}$ un vecteur normal à D. Alors D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ ($\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$).

Ex 1: soit a et b deux réels qui ne sont pas nuls tous les deux .
Montrer que $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal de D ssi une équation cartésienne de D est $ax+by+c=0$.
Remarque : Le vecteur $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur de la droite D.

- Le cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $IM=R$. Ce cercle a pour équation cartésienne $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

5) Distance d'un point à une droite.

Soit D une droite d'équation $ax+by+c=0$ dans un repère orthonormal (a et b non nuls tous les deux) et A un point de coordonnées (x_A, y_A) .

La distance du point A à la droite D est égale à : $\dfrac{|a\,x_A+b\,y_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ex 2: Dans un repère orthonormé, on donne les points : A(1;3) , B(2;5) et C(-1;4) .
A) Démontrer que ABC est rectangle et isocèle.
B) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
C) Déterminer une équation de la médiatrice de [BC].
Soit (d) une droite d'équation 3x-4y+7=0
D) Calculer la distance de A à (d).
E) Le point B appartient-il à (d)?
F) Donner une équation de la droite (AB) .
G) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (AB).
I) Donner un vecteur normal de (d) et un vecteur directeur de (d).
J) Donner une équation de la droite perpendiculaire à (d) passant par B.
K) Donner une équation de la droite parallèle à (d) passant par B.

Produit scalaire dans l'espace

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient des représentants de ces vecteurs.

Il existe un plan P contenant les points A, B et C. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ peut être calculé dans le plan P.

Donc toutes les propriétés du produit scalaire énoncés dans le plan s'appliquent dans l'espace à des points et des vecteurs coplanaires.

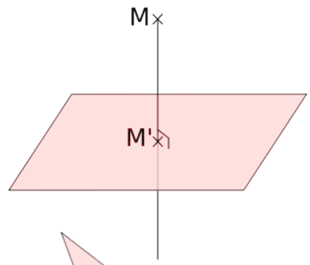
Ex 3: Soit ABCD un tétraèdre régulier de coté a, I,J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AD].
Monter que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$; $\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AD}=0$; $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{a^2}{4}$; cos $\widehat{ADI}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1) Expression du produit scalaire dans l'espace :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ dans un repère orthonormée de l'espace.
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\,x'+y\,y'+z\,z'$.

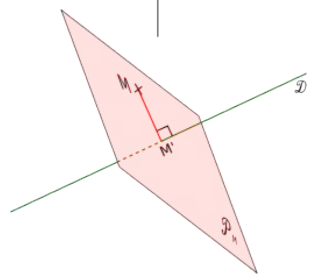
2) Projections orthogonales dans l'espace :

- Projection orthogonale sur un plan :



Soient P un plan, M un point de l'espace et Δ_M la droite passant par M et perpendiculaire à P.
Δ_M coupe le plan P en un point M', ce point est appelé le projeté orthogonal de M sur le plan P.

- Projection orthogonale sur une droite :



Soient une droite D, M un point de l'espace et P_M le plan passant par M et perpendiculaire à D.
P_M coupe la droite D en un point M', ce point est appelé le projeté orthogonal de M sur la droite D.

3) Équation cartésienne d'un plan :

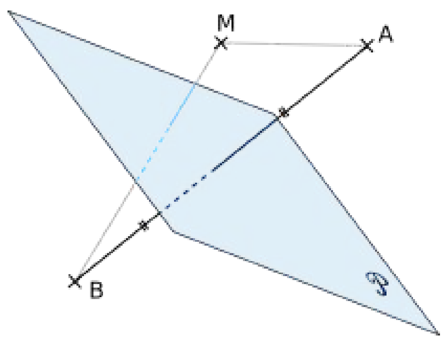
L'équation cartésienne d'un plan de l'espace est de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non nuls tous les trois. Ce plan admet pour vecteur normal, le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$. Un vecteur normal à un plan étant un vecteur orthogonal à tout vecteur de ce plan.
Et réciproquement, un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ où d est un réel.

4) Distance d'un point à un plan :

Soit P un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ dans un repère orthonormal (a, b et c non nuls tous les trois) et A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A).
La distance du point A au plan P est égale à : $\dfrac{|a x_A+b y_A+c z_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
Remarque : C'est la plus courte distance entre le point A et un point du plan P. C'est aussi la distance AH ou H est le projeté orthogonale de A sur P.

Ex 4: Soit A(0;1;-1); B(2;1;-2); et C(1;0;-2) trois points dans un repère orthonormée de l'espace.
a) Démontrer que ces trois points déterminent un plan.
b) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC)
c) Déterminent une équation de (ABC)
d) Calculer la distance du point D(1;1;1) au plan (ABC)
e) Donner une équation du plan parallèle à (ABC) passant par D.

5) Inéquation caractérisant un demi-espace :



Soient A et B deux points distincts de l'espace et P le plan médiateur du segment $[AB]$. Ce plan partage l'espace en deux demi-espaces, l'un contenant le point A et l'autre contenant le point B.
Autrement dit, il existe deux demi-espaces, l'un étant l'ensemble des points M tels que $MA \geq MB$ et l'autre étant l'ensemble des points M tels que $MA \leq MB$.

Si P a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, le plan divise l'espace en deux demi-espaces tels que $ax+by+cz+d \geq 0$ pour l'un et $ax+by+cz+d \leq 0$ pour l'autre.

Ex 5: Soit A(1;1;1); B(3;-1;-3); deux points dans un repère orthonormée de l'espace.
a) déterminer une équation du plan médiateur du segment [AB].
b) Déterminer l'inéquation du demi espace de frontière ce plan et contenant B, frontière comprise.

6) **<u>Équation de la sphère :</u>**

La sphère de centre $I(a\,;b\,;c)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x\,,y\,,z)$ de l'espace tels que $IM=R$.
Son équation cartésienne est : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Ex 6: Démontrer que l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2=0$ est une sphère. Le plan P d'équation $x-2y+2z+1=0$ est-il sécant à cette sphère?

7) <u>Équation paramétrique d'une droite :</u>

Un point $M(x\,;y\,;z)$ est sur la droite (d) passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a\,;b\,;c)$ ssi il existe t∈ℝ tel que $\overrightarrow{AM}$ =t $\vec{U}$ ssi $\begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases}$ avec t ∈ ℝ

Réciproquement, il est facile de lire sur l'équation paramétrique d'une droite un vecteur directeur, et chaque valeur de t correspond à un point.

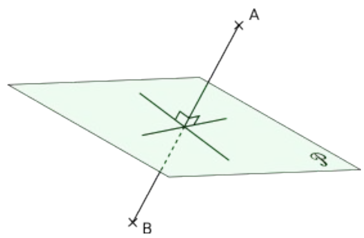
8) **<u>Orthogonalité de deux droites :</u>**

Par définition, deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point quelconque sont perpendiculaire.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

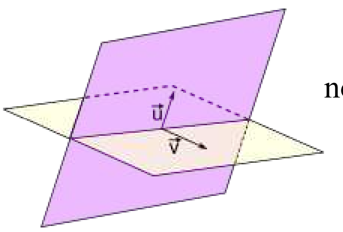
Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

<u>9) Droites et plans perpendiculaires :</u>

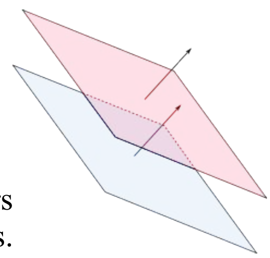


Une droite est perpendiculaire à un plan si celle ci est perpendiculaire à deux droites sécantes appartenant à ce plan.
Autrement dit, une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires du plan. C'est à dire $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$.

<u>10) Plans perpendiculaires et plans parallèles :</u>



Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.



Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont colinéaires.

Ex 7 :*Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points*
A(2 ; 4 ; 1), B(0 ; 4 ; −3), C(3 ; 1 ; −3) , D(1 ; 0 ; −2) , E(3 ; 2 ; −1) , $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$
Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire en justifiant, si elle est vraie ou si elle est fausse.
1. Une équation du plan (ABC) est : 2x +2y −z −11 = 0.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante : (CD) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$ *(t ∈R)*
5. Le point I est sur la droite (AB).