Exercice 1

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD

1. Montrer que la droite (AA1) est orthogonale au plan (BCD).
 (On pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}$)
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].

a. Montrer que G appartient au segment [AA1] et déterminer la longueur AG.

b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$\| \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} \|=2 \| \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \|$.

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.

a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$

b. Démontrer l'égalité $HC^2-HD^2=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}$

c. En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est $V=\frac{1}{3}bh$

Exercice 2

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte. L e candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(−6 ; 2 ; 1).

Le plan P admet pour équation cartésienne x +2y +2z = 5.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\| 4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB} \|=2$

a. un plan de l'espace b. une sphère c. l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P sont :

a. $\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ b. $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$ c. $\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

a. coupe le plan P suivant un cercle ; b. est tangente au plan P ; c. ne coupe pas le plan P

4. On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;-1)$ et la droite D′ d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases}$ (t ∈ R). Les droites D et D′ sont :

a. coplanaires et parallèles b. coplanaires et sécantes c. non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a. la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}-t \\ y=\frac{3}{2}-7t \\ z=2+t \end{cases}$ (t ∈ R).

b. le plan d'équation cartésienne 9x − y +2z +11 = 0.

c. le plan d'équation cartésienne x +7y −z −7 = 0.

Exercice 3

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).Démontrer que le plan médiateur de [KL]est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points A(4 ; 0 ; −3), B(2 ; 2 ; 2), C(3 ; −3 ; −1), D(0 ; 0 ; −3).

1. Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation
$4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations $2x - 10y - 6z - 7 = 0$ et $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3. En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?