Équations de droites et plans de l'espaces

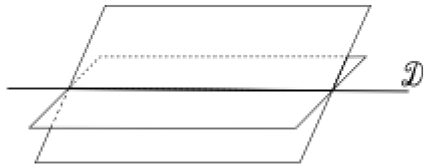
1) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit D la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

Le point $M(x, y, z)$ appartient à D si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b, t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases}$

Ce système est appelé système d'équation paramétrique de D, t est le paramètre de cette représentation. Appelé aussi représentation paramétrique.

2) Système de deux équations cartésiennes représentant une droite :



L'intersection de deux plans sécants est une droite, on peut ainsi écrire l'équation d'une droite sous la forme d'un système comportant l'équation de deux plans formant cette droite.

Ainsi, soient les plans P et P' d'équations cartésiennes respectives : P : $ax + by + cz + d = 0$ et P' : $a'x + b'y + c'z + d = 0$.

On peut alors exprimer l'équation de la droite D intersection de P et P' sous la forme d'un système. $M(x, y, z)$ est l'ensemble des points de D.

On a : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}$.

Cette équation n'est pas unique car D est l'intersection d'une infinité de plans différents.

Remarque : Ce système admet pour solution une droite si et seulement si a, b et c ne sont pas respectivement proportionnels à a', b' et c', c'est à dire que leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Ex 1 : Soit A(1;2;5) et B(-1;3;4) deux points de l'espace munit d'un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
1) *donner une équation paramétrique de la droite (AB)*
2) *le point C(2,3,5) appartient-il à (AB) ?*
3) *Donner un système de deux équations cartésiennes représentant (AB)*
4) *Donner une équation paramétrique de chacun des trois axes du repère orthonormé* $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

3) Équation cartésienne d'un plan :

L'équation cartésienne d'un plan de l'espace est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c non nuls tous les trois. Ce plan admet pour vecteur normal, le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$. Un vecteur normal à un plan étant un vecteur orthogonal à tout vecteur de ce plan.Et réciproquement, un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel.

4) Système d'équations paramétriques d'un plan :

Si $\vec{U}(a;b;c)$ et $\vec{V}(a';b';c')$ sont deux vecteurs directeurs du plan P et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de P, alors $M \in P$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{U} + t'\vec{V}$ ssi $\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$

Ex 2 : Soit A(1;2;5) et B(-1;3;4) et C(2;3;5) points de l'espace munit d'un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
1) *Donner un système d'équation paramétrique du plan ABC.*
2) *En déduire une équation cartésienne puis un vecteur normal du plan (ABC)*
3) *Déterminer l'intersection du plan (ABC) avec chacun des plan de base.*
4) *Déterminer l'intersection du plan (ABC) avec la droite (OE) pour E(5;1;-2)*