Formes algébriques et formes exponentielles

Un nombre complexe est associé a un point du plan complexe. On dit qu'un point M a pour affixe le nombre complexe z.
Pour repérer un point la méthode la plus usité (dans le secondaire..) est , dans un repère, la donnée des coordonnées cartésienne (comme Descartes ) du point (abscisse et ordonnée) .
Ce repérage correspond a la notation algébrique d'un nombre complexe : Z = a + ib ou a est la partie réel du nombre complexe mais aussi l'abscisse du point M , quand à b , ….

Mais il existe une autre manière de repérer un point : les coordonnées polaires.

Imaginer vous a bords d'un sous marins, vous voulez repérer tous les obstacles situer à la même profondeur que vous (sur le même plan horizontale) . Vous envoyez avec votre sonar un rayon tout autour de vous (donc de manière circulaire, avec un angle allant de 0 a $2\pi$ ) . Lorsque celui-ci rencontre un obstacle, il revient. En fonction du temps de retour on peut calculer la distance entre le point d'émission et l'obstacle. Et si c'est un sous marin ennemi avec un peinture qui ne renvoie pas les rayons ? vous êtes mort ….Mais tel n'est pas notre propos.

Retenons simplement que dans repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$, n'importe quel point M peut être associé a ses coordonnée polaire : La distance r = OM et l'angle $\vartheta = \left(\vec{i};\vec{OM}\right)$. Ce repérage correspond à la notation exponentielle d'un nombre complexe : $Z = re^{i\vartheta}$
Comment passer d'une forme à l'autre ? En passant par la forme trigonométrique ! Mais pour faire de la trigonométrie, il faut au préalable se placer dans un repère orthonormé.

La distance OM est égale au $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Soit P le projeté orthogonale de M sur $\left(0;\vec{i}\right)$.

Dans le triangle rectangle OMP, $\cos\vartheta = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{r}$ et $\sin\vartheta = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{r}$

En pratique voici deux méthodes pour passez d'une forme à l'autre :

D'algébrique à exponentielle :
Soit Z = a+ib

1) calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2) $\cos\vartheta = \frac{a}{r}$ en général c'est une valeur connue ( $0;\pm\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};1$ ) mais elle correspond a deux valeurs de $\vartheta$ sur $[-\pi;\pi]$ : une positive ou une négative.
3) $\sin\vartheta = \frac{b}{r}$ donc si sin $\vartheta$ et donc b est positif on choisit la valeur de $\vartheta$ positive, sinon on choisit la valeur de $\vartheta$ négative.
4) Donc a= r cos $\vartheta$ et b = r sin $\vartheta$ donc z = r(cos $\vartheta$ +isin $\vartheta$ ) ;ce que l'on appelle la forme trigonométrique et par définition $Z = re^{i\vartheta}$ (forme exponentielle )

D'exponentielle à algébrique :

$Z = re^{i\vartheta}$ = r(cos $\vartheta$ +isin $\vartheta$ ) = r cos $\vartheta$ + i rsin $\vartheta$ donc si a= r cos $\vartheta$ et b = r sin $\vartheta$ alors Z = a+ib

Intérêt des différentes formes :

La forme algébrique permet d'additionner facilement et une lecture rapide de l'abscisse et de l'ordonnée.

La forme exponentielle permet de multiplier et diviser facilement et une lecture rapide du module et de l'argument.

Application :
1) valeur exacte des cosinus et sinus de certains angle.

En multipliant deux nombres complexes ayant comme argument une valeur remarquable ( $k\dfrac{\pi}{2}; k\dfrac{\pi}{3}; k\dfrac{\pi}{4}; \ldots$)

On obtient un nombre que l'on peut exprimer sous formes algébrique et exponentielle. La comparaison des formes algébrique et trigonométriques permet de déterminer valeur exacte des cosinus et sinus de certains angle.

Ex : $z_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\pi/4}$

1) Forme algébrique de $z_1 z_2 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ en développant le produit des deux formes algébriques.
2) Forme exponentielle de $z_1 z_2 = e^{i\pi/3} e^{i\pi/4} = e^{i7\pi/12}$
3) Fromes trigonométriques : $z_1 z_2 = \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}$
4) Comparaison des formes algébrique et trigonométriques :
   $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$