Ce que l'on peut demander dans un exercice sur les complexes :

question de cours

1) pré requis : arg (zz') = arg (z) + arg (z') pour z,z' complexes non nuls.
démontrons que arg (z/z') = arg(z) – arg(z') pour z,z' complexes non nuls
Soit z un complexe non nul.
On pose z' = 1/z ; on à alors arg(z/z) = arg(z) + arg(1/z) = arg(1) = 0
Donc arg(1/z) = - arg (z)
Soit z et z' deux complexes non nuls
arg (z/z') = arg($z*\frac{1}{z'}$) = arg(z) + arg ($\frac{1}{z'}$) = arg(z) – arg(z')

2)pré requis : pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z, arg(z) = ($\vec{u}$; $\vec{w}$)
démontrons que pour tout A,B,C points distincts du plan d'affixe a,b et c :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{AB} \ ; \ \vec{AC})$$

$$(\vec{AB} \ ; \ \vec{AC}) = (\vec{AB} \ ; \ \vec{u}) + (\vec{u} \ ; \ \vec{AC}) = (\vec{u} \ ; \ \vec{AC}) - (\vec{u} \ ; \ \vec{AB})$$

$$= \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$$

3) Pré requis: $|z|^2 = z\bar{z}$
Démontrons que $|z_1 z_2| = |z_1| * |z_2|$

Resolution d'équation

Equation de degré 2 : Utiliser la formule.
Equation de degré 3 : Il faut d'abord factoriser.
Ex : résoudre dans ℂ l'équation $x^3 -1 = 0$

- On remarque 1 est une racine évidente.
- Le polynôme $x^3 -1$ se factorise donc par (x-1) et donc
  $x^3-1 = (x-1)(x^2+ax+b)$ avec a et b dans R ; on trouve que
  $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$
- On utilise la formule pour x^2+x+1
- On conclut $z \in \{ 1 \ ; \ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \ ; \ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \}$

Remarque : La factorisation peut être soit donnée, soit guidée .
Remarque : Si à la question suivante, on vous demande de placer des points dont les affixes sont les valeurs que l'on vient de déterminer, c'est bon signe ….

Formes algébriques et formes exponentielles

La distance OM est égale au $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Soit P le projeté orthogonale de M sur $\left(0; \vec{i}\right)$.

Dans le triangle rectangle OMP, $\cos\vartheta = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{r}$ et $\sin\vartheta = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{r}$

En pratique voici deux méthodes pour passez d'une forme à l'autre :

<u>D'algébrique à exponentielle :</u>

Soit Z = a+ib

1) calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2) $\cos\vartheta = \frac{a}{r}$ en général c'est une valeur connue ($0;\pm\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};1$) mais elle correspond a deux valeurs de ϑ sur $[-\pi;\pi]$: une positive ou une négative.
3) $\sin\vartheta = \frac{b}{r}$ donc si $\sin\vartheta$ et donc b est positif on choisit la valeur de ϑ positive, sinon on choisit la valeur de ϑ négative.
4) Donc a= r cosϑ et b = r sin ϑ donc z = r(cosϑ+isinϑ) ;ce que l'on appelle la forme trigonométrique et par définition $Z = re^{i\vartheta}$ (forme exponentielle)

<u>D'exponentielle à algébrique :</u>

$Z = re^{i\vartheta}$ = r(cosϑ+isinϑ) = r cos ϑ + i rsinϑ donc si a= r cosϑ et b = r sin ϑ alors Z = a+ib

Intérêt des différentes formes :
La forme algébrique permet d'additionner facilement et une lecture rapide de l'abscisse et de l'ordonnée.

La forme exponentielle permet de multiplier et diviser facilement et une lecture rapide du module et de l'argument.

<u>Application :</u>

1) valeur exacte des cosinus et sinus de certains angle.

En multipliant deux nombres complexes ayant comme argument une valeur remarquable ($k\frac{\pi}{2};k\frac{\pi}{3};k\frac{\pi}{4};...$)

On obtient un nombre que l'on peut exprimer sous formes algébrique et exponentielle. La comparaison des formes algébrique et trigonométriques permet de déterminer valeur exacte des cosinus et sinus de certains angle.

Ex : $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\pi/4}$

1) Forme algébrique de $z_1z_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ en développant le produit des deux formes algébriques.
2) Forme exponentielle de $z_1z_2 = e^{i\pi/3}e^{i\pi/4} = e^{i7\pi/12}$
3) Fromes trigonométriques : $z_1z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$
4) Comparaison des formes algébrique et trigonométriques :
   $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Démontrer des propriétés géométriques

Un argument, c'est un angle.
Un module, c'est une distance.

Montrer qu'ABC est un <u>triangle rectangle</u> en A:

- Calculer les longueurs des cotés et utiliser la réciproque de Pythagore.
- Montrer que arg $\frac{b-a}{c-a}$ est égale à π/2 + k π ; k ∈ **Z**.

Montrer qu'ABC est un <u>triangle équilatéral</u> :

- Calculer les longueurs des cotés.
- Montrer que $\left|\frac{b-a}{c-a}\right|$=1 (triangle isocèle)

  et arg $\frac{b-a}{c-a}$ est égale à π/3 + 2k π ; k ∈ **Z**.

En fonction de l'énoncé (des questions précédentes) on choisit une technique. On peut montrer ainsi qu'on a un <u>carré, losange, rectangle</u>… Penser aussi aux propriétés des <u>diagonales</u>.

Montrer qu'ABCD est un <u>parallélogramme</u> :

- Il suffit de calculer les affixes de deux vecteurs ($\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ par exemple). Si deux vecteurs sont égaux, cela suffit pour avoir un parallélogramme.

Utiliser des transformations

On a des formules permettant de calculer l'affixe z' de l'image d'un point d'affixe z .

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe u :	$z' = z + u$
Homothétie de centre A(a) et de rapport k :	$z' - a = k(z - a)$
Rotation de centre A(a) et d'angle θ :	$z' - a = e^{i\theta}(z - a)$

Ceci permet de manière assez simple de calculer l'image d'un point, de deux point et donc d'une droite.
Pour l'image d'un cercle, chercher l'image du centre, et le rayon est le même pour une translation ou une rotation, multiplier par $|k|$ pour une homothétie.

Remarque : pour ces trois transformations, tout tournera autour de ces formules :

- Trouver l'affixe du centre a partir d'un point, de son image et du rapport ou de l'angle …..(Résoudre l'équation)
- Trouver le rapport ou l'angle a partir de l'affixe du centre, d'un point et de son image …..(Résoudre l'équation)
- Montrer qu'un point est l'image d'un autre par une transformation …
- . …

Ensemble de points

<u>L'ensemble des réels</u>, c'est l'ensemble des points M dont l'affixe z :

- $\text{Im}(z) = 0$
- $\text{Arg}(z) = 0$ ou $\pi \quad +2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $z = \bar{z}$

<u>Le cercle</u> de centre A(a) et de rayon r c'est l'ensemble des points M d'affixe z :

- $z = a + r\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0\,;\,2\pi[$
- $|z - a| = r$
- $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$
- Si [BC] est un diamètre du cercle (privé de A et B) :
  $(\vec{MB}\ ;\ \vec{MC}) = \pi/2 + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Remarque : $(\vec{MB}\ ;\ \vec{MC}) = \pi/2 + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ correspond à un demi cercle.

<u>La droite</u> (AB) avec A(a) et B(b) est l'ensemble des points M d'affixe z :

- $(\vec{AM}\ ;\ \vec{BM}) = \arg\left(\frac{m-b}{m-a}\right) = 0$ ou $\pi \quad +2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarque : $\arg(\frac{m-b}{m-a}) = \pi$ correspond au segment [AB].
Remarque : Les points A et B sont exclue de la droite.

<u>La médiatrice</u> de [AB] est l'ensemble des points M d'affixe z :

- $|z-a| = |z-b|$
- Si I(i) est le milieu de [AB] ; $(\vec{MI} \; ; \; \vec{AB}) = \arg(\frac{b-a}{i-z}) = \pi/2 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Utiliser une fonction

Une fonction complexe est une application transformant un nombre complexe en un autre nombre complexe.
On peut facilement calculer <u>l'image</u> d'un point :
Ex : $z' = f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ si z = 1 + i alors son image est $f(z) = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2}$

Pour le reste, selon les fonctions, certaines choses se feront bien, d'autre pas.

On pourra chercher a résoudre certaines <u>équations</u> : $f(z) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z = 1$

On pourra chercher à déterminer <u>les points invariants</u> :
$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow$ M est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

On pourra chercher à déterminer <u>des propriétés de la fonction</u> :
$\arg(z') = -\arg(\bar{z}) = \arg(z)$ pour tout z complexe .

On en déduit géométriquement que M et M' sont sur la même demi droite de centre O.
On pourra dire que chaque demi-droite est <u>globalement invariante</u> (un point de la demi droite se transforme en un point de la demi droite)

On pourra chercher à déterminer <u>l'image on l'antécédent d'un ensemble de point</u>. Dans ce cas, pas de règle : une droite peut se transformer en une droite, un segment, un cercle, ….
Il est impératif de se laisser guider par l'énoncé. Selon l'énoncé, certaines caractérisations seront plus appropriées …
Les caractérisations des quelques ensembles de points les plus courant sont rappelés plus haut.

Ex : z' = f(z) = $\frac{1}{\bar{z}}$ a) On montre que $\frac{z'-1}{z'-i} = -i\,(\overline{\frac{z-1}{z-i}})$

b) On en déduit $\arg\frac{z'-1}{z'-i}$ = arg (-i) + $\arg(\overline{\frac{z-1}{z-i}})$

$\arg\frac{z'-1}{z'-i}$ = -π/2 - $\arg(\frac{z-1}{z-i})$

c) appliquons la formule des angles avec A(1) et B(i) :

$(\vec{M'B}\ ;\ \vec{M'A})$ = -π/2 – $(\vec{MB}\ ;\ \vec{MA}\ )$

d) M ∈(AB) (privé de A et B)⇔ $(\vec{MB}\ ;\ \vec{MA}\ )$ = 0 +k π ; k ∈$\mathbb{Z}$

Donc on va pouvoir en déduire l'image de (AB) (privé de A et B) par f :

$(\vec{M'B}\ ;\ \vec{M'A})$ = -π/2 – $(\vec{MB}\ ;\ \vec{MA}\ )$ = - π/2 - π + k π ; k ∈$\mathbb{Z}$.

$(\vec{M'B}\ ;\ \vec{M'A})$ = π/2 + k π ; k ∈$\mathbb{Z}$

M' est sur le cercle de diamètre [AB] (privé de A et B)

Ex 2 : z' = $\frac{-4}{z-2}$ a) L'ensemble E des points M tel que $|z| = |z-2|$ est ….

b) On montre que $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

c) On en déduit l'image de E par la fonction f

$|z'-2| = 2$ donc M' est sur le cercle …

Ex 3 : Soit z'=$\frac{iz+3}{z+i}$ A(-i) et B(3i)

a) Trouver deux points invariants.

b) Montrer que l'image de c=-2+i est un réel.

c) Montrer que arg (z') = $(\vec{MA};\vec{MB}\ )$ + π/2 +2k π; k ∈$\mathbb{Z}$

Regarder l'expression de z', on y reconnaît presque les affixes de A et B

Regarder le résultat demander, le π/2 pourrait être arg(i), de là a penser a factoriser par i l'expression de z' ….

d) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

Commençons par retrouver toute les caractérisations de l'ensemble des imaginaires purs. Ensuite, vu que la question d) suit la c), choisissez la bonne …

e) Déterminer l'image du cercle de diamètre [AB] privé de A et B par la fonction f.

Choisissez la meilleure manière de caractériser un cercle au vue des questions précédentes.

De manière plus générale, on demande souvent de prouver une propriété qui sert dans les questions suivantes (et vous guide dans le choix de la méthode !