Nombres complexes

1) Définitions :

On prolonge ℝ dans un nouvelle ensemble , noté ℂ, en y ajoutant un nombre, noté i , qui à comme propriété : $i^2=-1$. Cette ensemble sera munit des même règles de calculs que ℝ. Les éléments de ℂ seront noté sont la forme algébrique : $z=a+ib$ avec a et b des nombres réels.

Ex : notons $z_1=2+3\mathrm{i}$ *et* $z_2=1-\mathrm{i}$

calculer la forme algébrique de z_1+z_2 *; de* $z_1\times z_2$ *;de* z_1^2 *et de* $\dfrac{z_1}{z_2}$

Le nombre a est appelé partie réel de z (notation Re(z))
Le nombre b est appelé partie imaginaire de z (notation Im(z))
Si $a=0$, on dit que z est un imaginaire pur.
Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réel **et** la même partie imaginaire.

Ex : calculer Re($\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$ *); Im ((3-i)²)*
Parmi les puissances de i *, lesquelles sont des imaginaire pur; lesquelles sont égaux.*

2) Affixe et géométrie :

Le plan rapporté à un repère orthogonal $(0;\vec{u},\vec{v})$ est appelé plan complexe. A tout point M de coordonnée (a;b) on associe le nombre complexe $z=a+ib$. Et réciproquement .
On appelle affixe de M le nombre z .
On appelle image de z le point M.

ex : placer les points M_1 *et* M_2 *correspondants à* z_1 *et* z_2 *dans le plan complexe.*
Construire le milieu I de [M_1M_2 *] et déterminer son affixe.*
Construire le symétrique de M_1 *par rapport à l'axe des abscisses et donner sont affixe.(noté* $\bar{z}$ *)*
Construire le symétrique de M_1 *par rapport à l'axe des ordonnées et donner sont affixe.*
Construire le symétrique de M_1 *par rapport à l'origine O et donner sont affixe*

A tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnée (a;b) on associe le nombre complexe $z=a+ib$. Et réciproquement
On appelle affixe de $\vec{u}$ le nombre z .
On appelle vecteur image de z le vecteur $\vec{u}$

Ex : Placer les points A(4;0) B(3;-1) C(-2;-1)
Déterminer les affixes des ces points et des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *;* $\overrightarrow{AB}$ *;* $\overrightarrow{OB}$ *;* $\overrightarrow{BA}$
Ex: Donner et démontrer les formules donnant l'affixe :
-d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$
-du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$
-du milieu I de [AB]
-du barycentre de A(α); B(β); C(γ)

3) Conjugués d'un nombre complexe:

On note $\bar{z}=a-ib$ le conjugué de z . *Démontrer les propriétés suivantes :*

Propriété : 1) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ 2) $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z}'$ 3) $\dfrac{1}{\bar{z}}=\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ 4) $\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}=\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$

5) $z\bar{z}=a^2+b^2$ est un réel positif ou nul.
6) z est réel si et seulement si $z=\bar{z}$
7) z est un imaginaire pur si et seulement si $z=-\bar{z}$

4) Module d'un nombre complexe :

La longueur OM=|| $\overrightarrow{OM}$ || est appelée module du nombre complexe z et est noté |z|= $\sqrt{a^2+b^2}$
propriété : 1) AB=|| $\overrightarrow{AB}$ || =| $z_A - z_B$ | 2) z=0 ⇔ |z|=0 3)|z+z'|⩽|z|+|z'|
4) | $z \times z'$ |=|z|*|z'| 5) ∀ n ∈ ℕ; | z^n |=|z|ⁿ6) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Ex : Démontrer ces propriétés.

Calculer les modules de -3i; (3+5i)(11-7i); $(4+3\text{i})^4$ *;* $\frac{5}{(1+\text{i})^2}$

Application : Déterminer géométriquement, algébriquement, puis construire :
a) L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2-\text{i}|=4$
b) L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2-\text{i}|=|z-4+\text{i}|$

5) Argument d'un nombre complexe :

Un argument du nombre complexe z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ (noté θ)

conséquence :
Les nombres positifs ont pour argument ....
Les nombres négatifs ont pour argument ....
Les imaginaires pur ont pour argument ....

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe affixe d'un point M du plan ayant pour coordonnées polaires le nombre réel r,module de z et l'angle θ, argument de z alors on peut écrire z sous sa forme trigonométrique : $z=a+ib=r(\cos(\theta)+isin(\theta))$

Propriétés: pour tous z,z' complexe et n ∈ ℕ

1) arg(zz')=arg(z)+arg(z') $+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$ $+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$ =arg(z)-arg(z') $+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

4) $\arg(z^n)=narg(z)$ $+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

dem : utiliser la forme trigonométrique pour démontrer le 1), une récurrence pour démontrer le 4)

Liens avec la géométrie : si A et B sont deux points distincts, C et D deux points distincts :

1) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u};\overrightarrow{AB})$ $+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB})$ $+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Dem: la propriété 2 est une conséquence de la propriété 1)

Ex : Soit A,B,et C trois points d'affixe $\text{i};2+\text{i}$ *et* $1+\text{i}(\sqrt{3}+1)$.

Calculer le module et l'argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$*, en déduire que ABC est équilatéral.*

6) Forme trigonométrique d'un nombre complexe:

La connaissance du module et de l'argument d'un nombre complexe suffit à définir ce nombre :

$$z=a+ib=r(\cos(\theta)+isin(\theta)) \Leftrightarrow \begin{cases} a=rcos(\theta) \\ b=rsin(\theta) \end{cases}$$

Réciproquement, connaissant *a* et *b,* il est facile d'obtenir $r=\sqrt{(a^2+b^2)}$ puis de déterminer θ:
$\cos(\theta)=\frac{a}{r}$ donne deux valeurs possible pour θ sur $]-\pi;\pi]$, le signe de $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$ donne θ.

Déterminer la forme algébrique, puis la forme trigonométrique de $z=(-\sqrt{(3)}+\text{i})(1-\text{i})$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(7\frac{\pi}{12}\right)$ *et de* $\sin\left(7\frac{\pi}{12}\right)$.

7) Forme exponentielle d'un nombre complexe:

Soit f: θ→ $\cos(\theta)+isin(\theta)$; on montre que $f(\theta+\theta')=f(\theta)\times f(\theta')$ d'où la notation $f(\theta)=e^{i\theta}$

Propriété: tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire :
$z=r(\cos(\theta)+isin(\theta)) = r\ e^{i\theta}$. Et réciproquement.

Les propriétés sont celles de la fonction exponentielle.
Application: Donner la forme exponentielle de $a=\frac{2-2i}{\sqrt{(3)}+i}$; $b=(-1+i)^{12}$; $c=(3e^{i\pi/3})^{57}$

Formules d'Euler : $\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Application: Donner le module et un argument de $z=1+e^{i2\theta}$

Formule de Moivre : pour tout θ réel et n entier, on a $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ donc :
$(\cos(\theta)+isin(\theta))^n=\cos(n\theta)+isin(n\theta)$ ce qui peut permettre de linéariser des expressions.

Application : Donner la forme algébrique de $(1+i)^{2006}$ et de $(-1+i)^{2006}$

8) Équations dans $\mathbb{C}$:

Propriété: Soit l'équation $az^2+bz+c=0$, d'inconnue z , avec a,b et c des nombres réels et $a\neq 0$.
Si $\Delta=b^2-4ac$ et $\Delta<0$ l'équation a deux solutions complexes conjuguées distinctes:
$z_1=-\frac{b}{2a}+\frac{i}{2a}\sqrt{-\Delta}$ et $z_2=-\frac{b}{2a}-\frac{i}{2a}\sqrt{-\Delta}$

Démontrer cette propriété.
Donner la forme exponentielle des solutions de l'équation $4z^2+3=0$, puis de $z^2-6\sqrt{3}z+36=0$.

9) Formes géométriques et nombres complexe:

On se positionne dans un repère orthonormal direct afin de travailler sur les modules et les arguments. Il s'agit d'associer des notions géométrique et leur équivalent complexe:

Tout d'abord, avec les complexes, il est facile de calculer l'affixe de vecteurs, et donc de montrer que l'on a un parallélogramme, des points alignés, des droites parallèles, ...

Ensuite, calculer un module, c'est calculer une distance, application possible :

- Montrer qu'un triangle est isocèle, équilatérale .
- Montrer qu'un triangle est rectangle (réciproque de Pythagore)
- Montrer qu'un point M est sur un cercle de centre O, rayon r : OM=r
- Montrer qu'un point M est sur la médiatrice de [AB]: MA=MB
- Montrer qu'on a un rectangle, losange, carré (éventuellement avec les diagonales ...)
- Obtenir l'équation d'un cercle, d'une médiatrice.
- Déterminer un ensemble de points : - $|(z-2i)|=3$ ⇔ M(z) ∈ ....
  - $|(z-2i)|=|(z+3)|$ ⇔ M(z) ∈ ...

Enfin, calculer un argument, c'est calculer un angle, ce qui permet de:
- Montrer qu'un triangle est équilatérale, rectangle
- Déterminer un ensemble de point (cercle, demi cercle, ...)