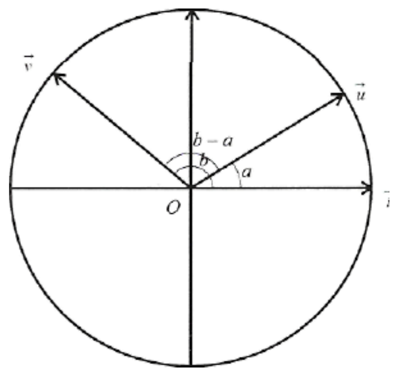
TRIGONOMETRIE

<u>Démonstration des formules de trigonométrie à l'aide du produit scalaire</u>



Dans le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé *(O*, i, j),

considérons les deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ tels que :

$$(i\,,u\,)\ = a \ \text{ et } \ (i\,,v\,)\ = b$$

u . *v* = !!*u*!!.!!*v* !!.cos(*u ; v)* = cos(*a- b)*

de plus *u(* cos *a ;* sin *a) et v(* cos *b ;* sin *b)* donc

u . *v* = cos *a* cos *b* + sin *a* sin *b* c'est-à-dire

Cos(a-b) =cos a .cos b + sin a. sin b

- En remplaçant *b* par *–b* on obtient :

cos(*a* + *b)* = cos *a* cos (-*b*) + sin *a* sin (-*b*) = cos *a* cos *b* - sin *a* sin *b.*

Cos(a+b) = cos a. cos b - sin a .sin b

- En remplaçant *a* par $\frac{\pi}{2} - a$ dans cos (*a*-*b*):

cos (($\frac{\pi}{2} - a$)-*b*))= *cos (*$\frac{\pi}{2}$- *a)*cos *b* + sin *(*$\frac{\pi}{2}$- *a*) sin *b*

cos ($\frac{\pi}{2}$-*(a+b))=* Sin *(a+b)* = sin *a* cos *b* + cos *a* sin *b*

Sin(a+b)=sin a .cos b + sin b .cos a

- En remplaçant *b* par -*b* dans cette dernière formule,:

sin(*a* –*b*) = sin *a* cos(-*b*) + cos *a* sin(-*b*) = sin *a* cos *b* - cos *a* sin *b*

Sin(a-b)=sin a .cos b - sin b .cos a

<u>Formules de duplication</u>

cos(2a) = cos(a+ a) = cos a cos a - sin asina = cos²a— sin² a

sin(2a) = sin *(a + a)* = sin *a* cos *a* + cos *a* sin a = 2 sin a cos a.

<u>Formules de linéarisation</u> <u>Rappel</u> :cos² a + sin² a = 1

Donc cos(2a) = $\cos^2$ *a* - (1 - $\cos^2$ *a)* = *2* $\cos^2$ *a* - 1

D'où ***Cos²a = $\frac{1}{2}$(cos2a + 1)***

De même cos(2a) = (1 - $\sin^2$ *a)* - $\sin^2$ *a* = 1 - 2$\sin^2$ *a*

D'où ***Sin²a = $\frac{1}{2}$(1 – cos2a)***