Repérage

1°) Cercle trigonométrique, angles en radians

On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1 , de périmètre 2π

on définit ainsi une nouvelle unité d'angle : le radian

degré	360°	180°	90°	60°	45°	30°
radian	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

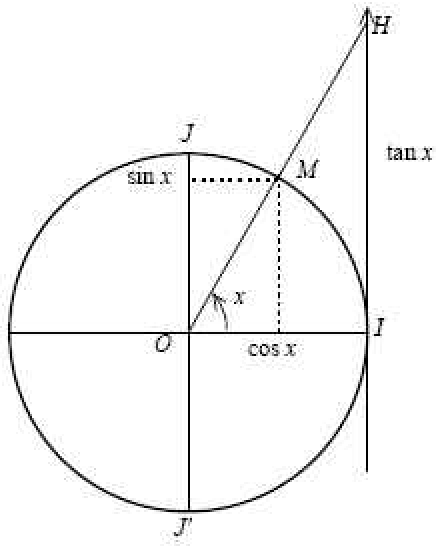
Sur le cercle trigonométrique, les angles sont orientés : le sens direct ou sens + est le sens inverse des aiguilles d'une montre, le sens indirect ou sens – est le sens des aiguilles d'une montre

on peut faire plusieurs tours de cercle : $7\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ on dit aussi $7\frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ modulo 2π

à 2π près

chaque angle a une infinité de mesure, **la mesure principale** est celle qui est comprise entre $-\pi$ et π

Sur le cercle trigonométrique, on place un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:
en abscisse, on lit le cosinus , en ordonnée , on lit le sinus



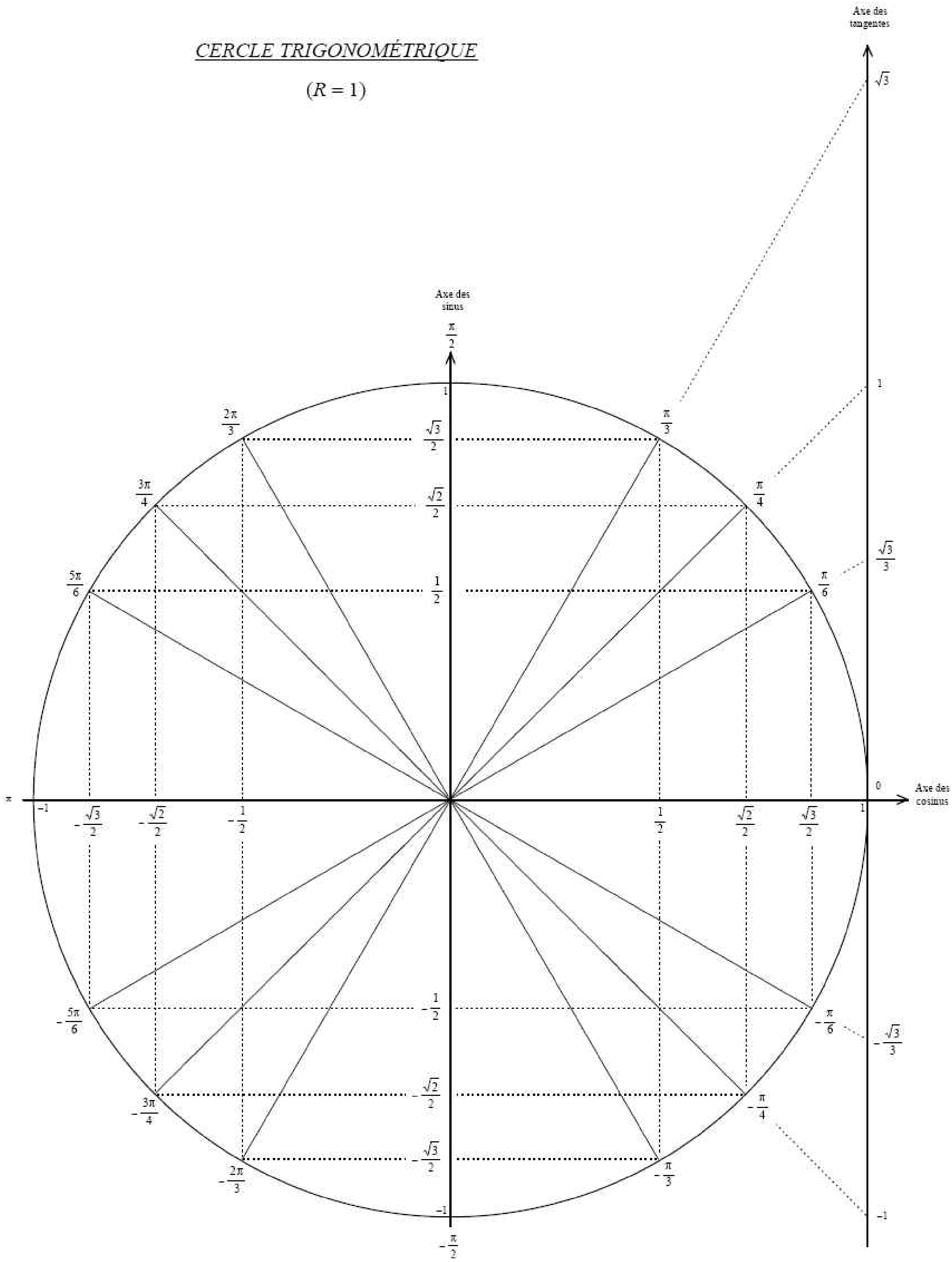
certaines valeurs sont à connaître par cœur:
(ainsi que la démonstration: voir feuille)

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

pour la tangente , on rappelle que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

<u>*CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE*</u>

$(R = 1)$



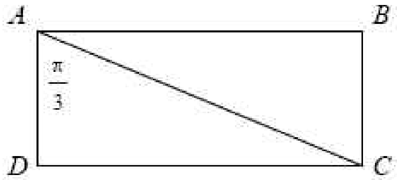
2°) angles géométriques, angles orientés

Un angle géométrique est toujours positif
un angle orienté peut être négatif

Exemple : Si l'orientation choisie est le sens trigonométrique, on a :

Angles géométriques :

$\widehat{DAC} = \widehat{CAD} = \frac{\pi}{3}$



Angles orientés (angle entre 2 vecteurs)

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

(mesures principales)

Exercice :Si $ABCD$ est un carré de centre O

Les angles géométriques $\widehat{AOB} = \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$

Les angles orientés ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{2}$ et ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD}$) = - $\frac{\pi}{2}$

($\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CB}$)= ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AO}$)= ($\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$)= ($\overrightarrow{OA}$;$\overrightarrow{OC}$)=

Si ABC est un triangle équilatéral de centre O

Les angles géométriques $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$

Les angles orientés : ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$)= ($\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB}$)= ($\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$)= ($\overrightarrow{OA}$;$\overrightarrow{OC}$)=

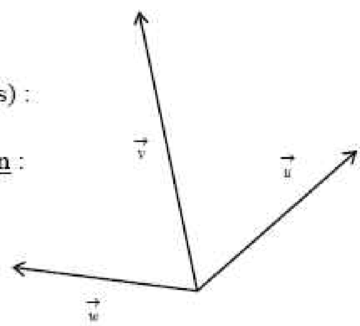
Propriétés :

Relation de Chasles avec les angles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a la relation suivante (dite de Chasles) :

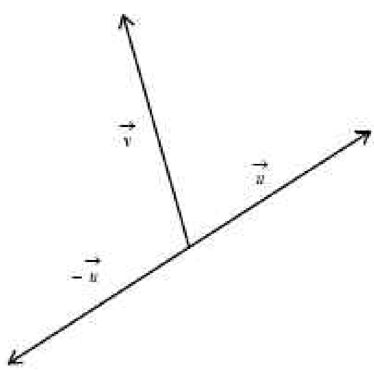
$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad (2\pi)$

Illustration :



(Cette relation est admise à notre niveau)

Variations : on a les relations suivantes :



- $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \quad (2\pi)$
- $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$ (pour tout $k \neq 0$)

En particulier ($k = -1$) : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

3°) Fonctions trigonométriques

Définitions:

Soit f une fonction définie sur un intervalle D_f, T un nombre réel non nul

- f est périodique de période T si pour tout $x \in D_f$, $x+T \in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$
- f est paire si pour tout $x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x)=f(x)$
- f est impaire si pour tout $x \in Df$, $-x \in Df$ et $f(-x)=-f(x)$

graphiquement : La courbe d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées .

La courbe d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La fonction définie sur IR par $f(x)=cosx$ est périodique de période 2π et paire

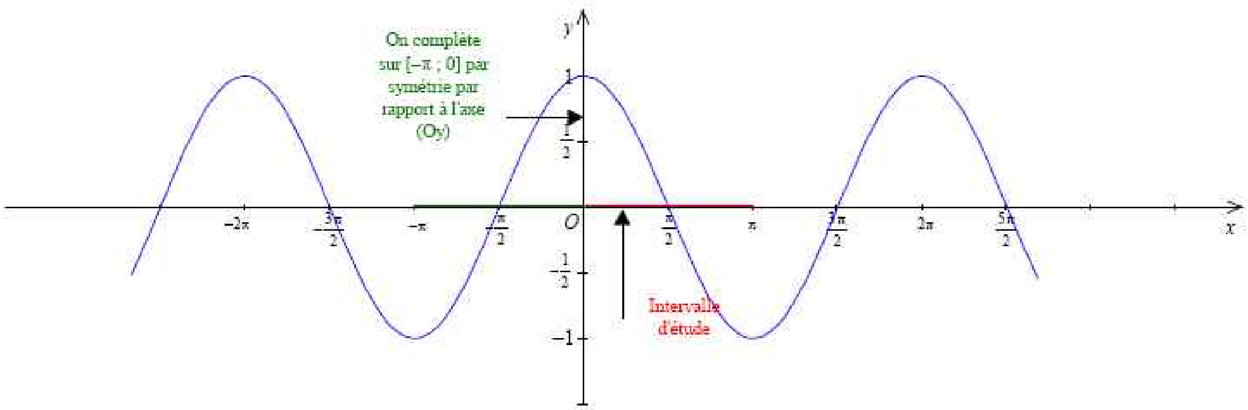
car $f(x+2\pi)=f(x)$ et $f(-x)=f(x)$ de plus $-1 \leqslant cosx \leqslant 1$

$f'(x)=-sinx$

sur $]0;\pi]$ $f'(x)<0$ donc f est décroissante

D'où le tableau de variations de la fonction cosinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = -\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
variations de cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



La fonction définie sur IR par $g(x)=sinx$ est périodique de période 2π et impaire

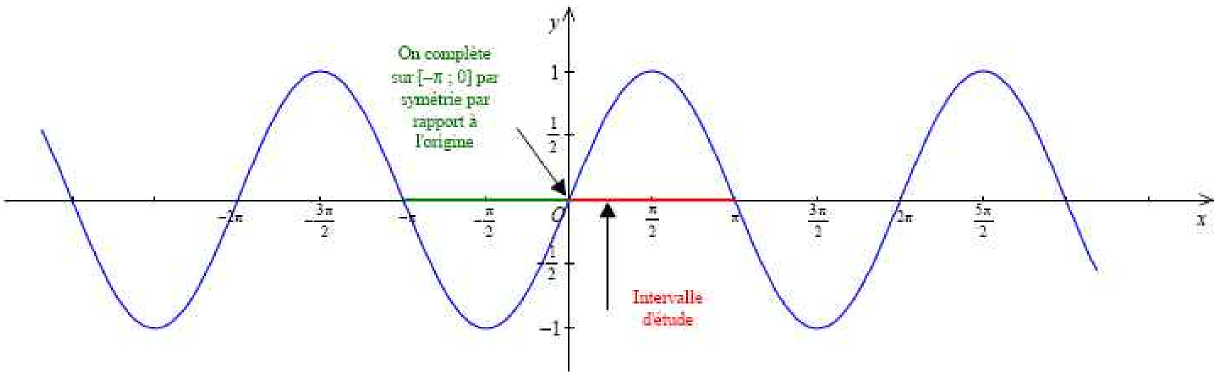
car $g(x+2\pi)=g(x)$ et $g(-x)=-g(x)$ de plus $-1 \leqslant sinx \leqslant 1$

$g'(x)=cosx$

sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ $g'(x)>0$ donc g est croissante sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ $g'(x)<0$ donc g est décroissante

D'où le tableau de variations de la fonction sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
Variations de sin	0	↗	1	↘	0



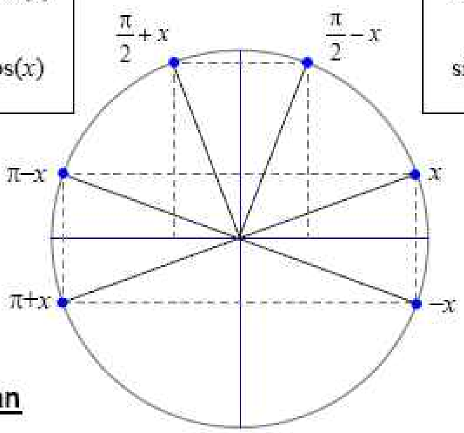
Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

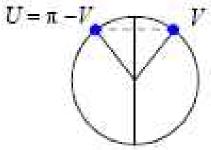
Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

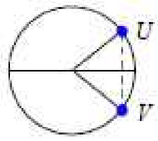
Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = -V\ [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \iff (U = V\ [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V\ [2\pi])$$

$$\tan(U) = \tan(V) \iff U = V\ [\pi]$$



4°) Cordonnées polaires

Définition: Soit M un point du plan

Les coordonnées cartésiennes de M dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) sont $(x_M ; y_M)$

les coordonnées polaires de M sont (r ;θ) où $r=OM$ et θ est la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}$)

il faut savoir passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires: $r=\sqrt{(x^2+y^2)}$

Soit A(-1; $\sqrt{3}$)

$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

θ tel que cos $\theta=-\frac{1}{2}$ et sin $\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$ donc A(2 ; $\frac{2\pi}{3}$)

et inversement , il faut savoir passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :

$x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$

Soit B($4;\frac{\pi}{6}$)

alors $x=4\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{4\times\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ et $y=4\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4\times 1}{2}=2$ donc B($2\sqrt{3}$;2)