LIMITE D'UNE SUITE

Etudier la limite d'une suite (u_n), c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$

1) LES DIFFERENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n).

cas 1

Si « ***u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand*** », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Pour tout réel $M > 0$, il existe un entier naturel p, tel que, si $n \geq p$, alors $u_n > M$

Ex : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Si les termes u_n finissent par être négatifs et « ***si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand*** », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Ex :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L, signifie que lorsque n est de plus en plus grand, les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L
C'est à dire, tout intervalle ouvert de centre L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Pour tout ε ($\varepsilon > 0$), il existe un entier naturel p, tel que, si $n \geq p$, alors $u_n \in \,]L-\varepsilon ; L+\varepsilon[$
(c'est à dire $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$)

Ex : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Rem :

Si une suite (u_n) a une limite finie L, alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Ex : La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Rem : Une suite qui ne converge pas est **divergente** . (cas 1 , cas 2 , cas 4)

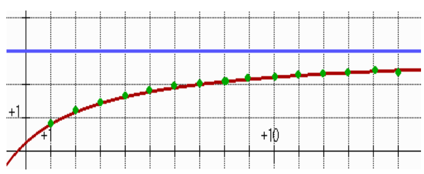
2) LE CAS $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

Si f a une limite finie ou infinie en $+\infty$, alors **la suite (u_n) a la même limite**.

Preuve intuitive : (cas où la limite est $+\infty$)
f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi lorsque x décrit l'intervalle $[a ; +\infty[$ les nombres f (x) sont aussi grands que l'on veut dès que x est assez grand . Il en est donc de même pour les nombres $u_n = f(n)$ puisque x prend toutes les valeurs entières de $[a ; +\infty[$ …

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+4}$ et la fonction $f : x \longmapsto \frac{3x+1}{x+4}$
Pour tout entier naturel n , on a $u_n = f(n)$; de plus … $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$



Attention : **La réciproque est fausse .**

Ex : Pour tout entier naturel n , on a $\sin(2\pi n) = 0$.
Ainsi la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(2\pi n)$ est une suite constante, donc convergente.
Mais , la fonction $f : x \longmapsto \sin(2\pi x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Conséquences pour quelques suites de référence :

- Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n, n^2 et n^3 ont pour limite $+\infty$.
- Les suites de termes généraux $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$ convergent vers 0 .

3) OPERATIONS ALGEBRIQUES

Les théorèmes énoncés sur la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions sont encore vrais pour les suites.

Ex : « Le cas de l'inverse »

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

4) THEOREME DES GENDARMES

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$.
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite l , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe un entier naturel p_1 , tel que, si $n \geq p_1$, $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$
De même, il existe un entier naturel p_2 , tel que, si $n \geq p_2$, $l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon$
Soit N le plus grand des entiers p_1 et p_2 .
Ainsi pour tout $n > N$, on a $l - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < l + \varepsilon$ et donc $l - \varepsilon < w_n < l + \varepsilon$

5) LIMITES DES SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

A) SUITES ARITHMETIQUES (évident)

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.
- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GEOMETRIQUES (q^n) (admis)

Soit q un réel .
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Ex :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Rem :

On en déduit facilement le cas général $u_0 q^n$ …

Ex :

Soit (u_n) La suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.
On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$