

Billes sphériques

On dépose une bille sphérique de rayon 5 cm dans un récipient cylindrique de diamètre 16 cm, hauteur 20 cm et contenant $V_0 \text{ cm}^3$ d'eau. La surface de l'eau est tangente à la bille.

Partie 1:

- 1) Représenter le récipient et la bille en perspective cavalière
- 2) Calculer le volume V_0 d'eau contenue dans le récipient .
- 3) A présent on vide le récipient et on place une bille de de rayon $x \text{ cm}$.
Calculer le volume d'eau $V(x)$ nécessaire pour recouvrir exactement la bille.
Exprimer $V(x)$ en fonction de x .
- 4) Quel est l'intervalle de définition de V ?
- 5) Construire une représentation graphique de la fonction $V(x) = \frac{4}{3}\pi(96x - x^3)$
- 6) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près du nombre x_1 , unique valeur de x autre que 5 pour laquelle il faut également un volume d'eau égale à V_0 .

Définition : Dire qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est une fonction polynôme signifie qu'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n avec $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout réel x :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$$

Théorème : Un polynôme non nul f peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$

a_n est le coefficient de plus haut degré.

L'entier naturel n est le degré du polynôme f .

Théorème : Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ces polynôme ont le même degré et si les coefficients de leurs termes de même degré sont égaux.

Partie 2:

On veut obtenir une valeur exact de x_1 : Soit $f(x) = V(x) - V_0$ pour $x \in]0;8]$.

- 1) Déterminer a, b et c tels que $f(x) = \frac{4}{3}\pi(x-5)(ax^2 + bx + c)$ pour tout $x \in]0;8]$
- 2) Compléter : $-x^2 - 5x + 71 = -[(x - \dots)^2 - \dots]$
- 3) Factoriser f , puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 4) Donner une valeur exact de x_1 puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
- 5) Quels sont les valeurs de x , pour lesquelles les billes sont recouvertes par un volume V_0 d'eau , et celles pour lesquelles les billes sortent de l'eau.