Fonctions polynômes et second degré

1. Fonctions

Définition et propriété :

On appelle racine d'un polynôme P toute valeur λ solution de l'équation $P(x) = 0$

On peut alors factoriser P par $(x - \lambda)$

si P est un polynôme de degré n : $P(x) = (x - \lambda)\, Q(x)$ avec $Q(x)$ polynôme de degré $n - 1$

Théorème

Une fonction polynôme de degré n a plus n racines

Donc un polynôme de degré 2 a 0, 1 ou 2 solutions

2. Forme canonique d' un trinôme

$P(x) = ax^2 + bx + c$ on factorise le polynôme par a alors

$P(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du carré $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

Donc $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ alors Δ est appelé le discriminant et

L'écriture $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée forme canonique du polynôme P

Cette forme canonique nous servira à :

_ dire si le trinôme a ou non des racines et lesquelles s'il en a

_ factoriser le polynôme lorsque ce sera possible

_ connaître le signe du trinôme

_ étudier les variations de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ et tracer sa représentation graphique avec précision (coordonnée de son extrémum)

3 Représentation graphique de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$

Théorème2:

La représentation graphique de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole

de sommet S $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ d'axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

de même sens que la courbe de x^2 si $a>0$ de sens contraire si $a<0$

4. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$,factorisation et signe du trinôme

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$

Donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ on a alors 3 cas

Théorème 3:

- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solutions réelles
- Si $\Delta = 0$ l'équation a une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple : $x^2 - 4x + 4 = 0$ a une seule solution $x = 2$

$-6x^2 + x + 1 = 0$ a deux solutions $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

$5x^2 + 6x + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle

Théorème 4:

- Si $\Delta < 0$ le trinôme ne se factorise pas $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$
- Si $\Delta = 0$ $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ $P(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Théorème 5:

- Si $\Delta < 0$ $P(x)$ est du signe de a
- Si $\Delta = 0$ $P(x)$ est du signe de a
- Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		*Signe de a*	0	*signe de –a*	0	*signe de a*	

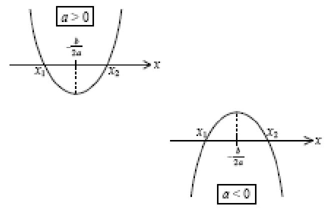
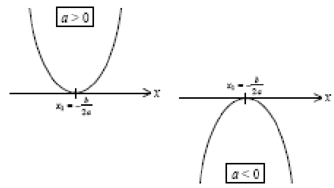
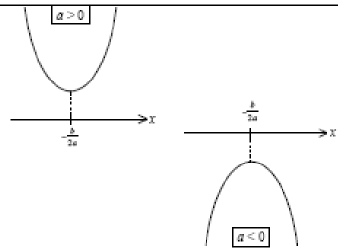
5. Somme et produit des racines d'un trinôme quand $\Delta > 0$.

Théorème 6 :

Lorsque $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines x_1 *et* x_2 dont la somme est $S = -\dfrac{b}{a}$ et le produit $P = \dfrac{c}{a}$ x_1 *et* x_2 sont également racine du trinôme $x^2 - Sx + P$

<u>Preuve</u> $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

$P = = x_1 \times x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Δ	racines	factorisation	signe	courbe
$\Delta > 0$	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	x : x_1 x_2 Signe de P(x) : Signe de a $-a$ a	
$\Delta = 0$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$P(x) = a(x-x_0)^2$	Signe de a	
$\Delta < 0$	pas de racines	Impossible de factoriser	Signe de a	

<u>Définition :</u>

On appelle fonction rationnelle une fonction f définie sur ℝ de la forme

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ *et* $Q(x)$ sont deux fonctions polynômes

exemple $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$

cas particulier une fonction rationnelle avec P et Q du premier degré c'est-à-dire de la forme

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est appelée fonction homographique