Produit scalaire

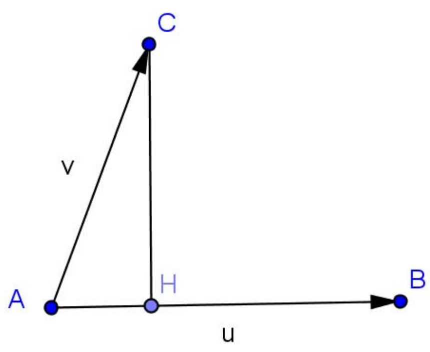
1. Définition du produit scalaire

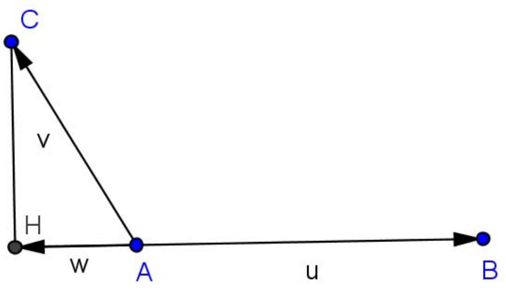
Définition :

soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Positif si l'angle BÂC est aigu — **Nul si** (AB) $\perp$ (AC) — **Négatif si l'angle BÂC est obtus**





$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ AB×AH — **$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$** — **$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ = - AB ×AH**

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens — **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux** — **si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposé**

où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

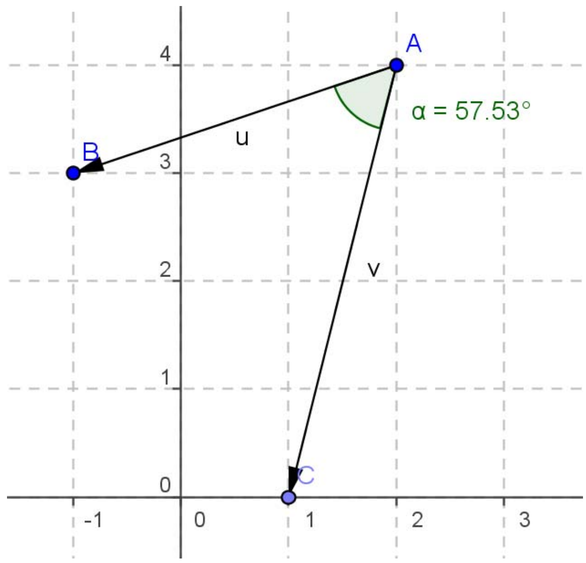
Propriété :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})}$$

Dans un repère orthonormal,

soient $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$



Exemple: Dans un repère ortonormal ,

A(2; 4) B(-1;3) et C(1;0)

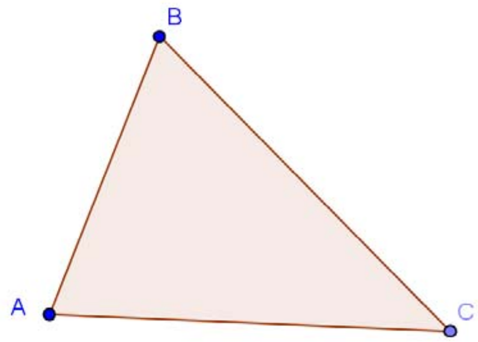
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis cos Â puis Â

2. Applications du produit scalaire

a) Théorème de la médiane :

A BM un triangle quelconque , I le milieu de [AB]

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 :$$



$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 :}$$

Exemple Calculer une médiane

ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 3 et BC = 6,

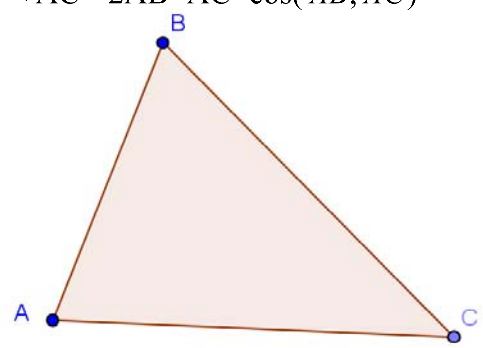
I milieu de [BC]   Calculer AI

b) Théorème d'al Kashi :

A BC un triangle quelconque :

$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$



Exemple : Calculer une longueur ou calculer un angle

si ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 3 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60°$

calculer BC puis $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$

c) **aire d'un triangle ABC**

Aire $= \frac{1}{2}$ Base ×hauteur $= \frac{1}{2}$ AC×BH   Or sin A $= \frac{BH}{AB}$ donc BH = AB×sinA donc

$$\boxed{\text{Aire} = \frac{1}{2} AC\times AB \sin\widehat{A} = \frac{1}{2} BC\times AB \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} AC\times CB \sin\widehat{C}}$$

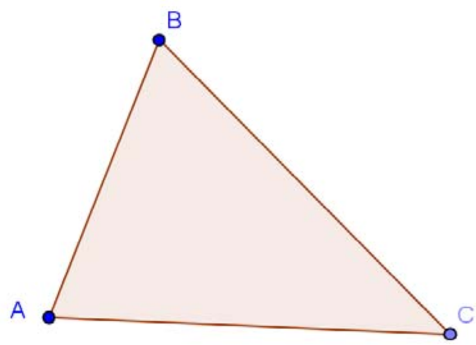
d) **Propriété des sinus**

$$\boxed{\frac{2\times \text{Aire}}{AB\times AC\times BC} = \frac{\sin\widehat{A}}{BC} = \frac{\sin\widehat{B}}{AC} = \frac{\sin\widehat{C}}{AB}}$$

Exemple : Calculer une longueur ou calculer un angle

ABC est un triangle tel que AB = 4, Â = 30 et B = 70°

calculer $\widehat{C}$ puis AC et BC



3. Equations de droites et cercles

a) équations de droites

lieu géométrique : l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{AM}.\perp\ \overrightarrow{AB}$

*c'*est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A : dans un repère orthonormal, si A(-1 ; 2) ; B(3 ;4) et M$(x;y)$ alors $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$ et $\overrightarrow{AB}(4;2)$ donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ équivaut à

$4(x+1)+2(y-2)=4x+4+2y-4=4x+2y=0$ équivaut à $y=-2x$

dans un repère orthonormal, une droite a pour **équation réduite** $\boxed{y = mx + p}$

m est le coefficient directeur donc $\vec{u}\,(1\ ;\ m)$ est un vecteur directeur

un vecteur normal $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ **(** $\vec{u}\perp\vec{v}$**)** donc tel que $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ **= 0**

par exemple $\vec{v}\,(m\ ;\ -1)$

- une droite a pour **équation cartésienne** $\boxed{ax + by = c}$

puisque $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ alors un vecteur directeur est $\vec{u}$ **.**$(1\ ;\ -\frac{a}{b})$ ou bien (b ; $-a$)

un vecteur normal peut être $\vec{v}\,(a\ ;\ b)$

Application : ABC est un triangle tel que A(-1 ; 2) B(4 ;1) et C(3 ; 7)
calculer une équation de la hauteur (BH) $\perp$ (AC)

b) équations de cercles

lieu géométrique : l'ensemble des points M tels que $.\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=0$ équivaut à $\overrightarrow{MA}.\perp\ \overrightarrow{MB}$
*c'*est le cercle de diamètre [AB] : dans un repère orthonormal, si A(-1 ; 2) ; B(3 ;4) et M$(x;y)$ alors

$\overrightarrow{MA}.(x+1;y-2)$ et $\overrightarrow{MB}\ x-3;y-4)$ donc $.\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=0$ équivaut à

$(x+1)(x-3)+(y-2)(y-4)=x^2-2x-3+y^2-6y+8=(x-1)^2-1+(y-3)^2-9+5=0$ équivaut à

$(x-1)^2+(y-3)^2=5$ le cercle a pour centre I le milieu de [AB] : I (1 ;3) et de rayon IA=$\sqrt{5}$

A SAVOIR : un cercle de centre I et de rayon R a pour équation $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$

:

4. lieux géométriques

AB = 4 cm I milieu de [AB]

Exemple 1 : l'ensemble des points M tels que $.\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=1$ équivaut à (avec la relation de Chasles)

$(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=MI^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=MI^2-\frac{AB^2}{2}$=1 donc

$MI^2=1+\frac{AB^2}{2}=1+\frac{4^2}{2}=1+\frac{16}{2}=1+8=9$ donc $MI=\sqrt{9}$ donc $MI\ =3$ M est sur le cercle de centre I et de rayon 3

Exemple 2 : l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = -4$ équivaut à $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = -4$

$(2\overrightarrow{MI}).(\overrightarrow{BA}) = -4$ donc $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -2$ soit H est le projeté orthogonal de M sur AB alors

*c'*est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H , il faut placer H à -0,5 cm de I

Exemple 3 : l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 6$ équivaut à $2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 6$

donc $2MI^2 = 6 - \frac{AB^2}{2} = 6 - \frac{4^2}{2} = 6 - \frac{16}{2} = 6 - 8 = -2$ donc $MI^2 = -1$ c'est impossible