Dérivation

1. Taux de variation d'une fonction

Soit C la courbe représentative de la fonction carré et un le point de cette courbe d'abscisse 1.

M est un point variable de C dont l'abscisse est 1+h.

Donner l'équation des cordes (AM) pour h=1 puis 0,5 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,01

Donner une équation de (AM) en fonction de h.

Que devient cette équation quand h se rapproche de 0.

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur un intervalle E , C sa courbe représentative dans un repère

a et b sont deux nombres distincts appartenant à E , A et B les points de C d'abscisses a et b

le nombre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB)

on l' appelle taux de variation de f entre a et b ou encore taux d'accroissement

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

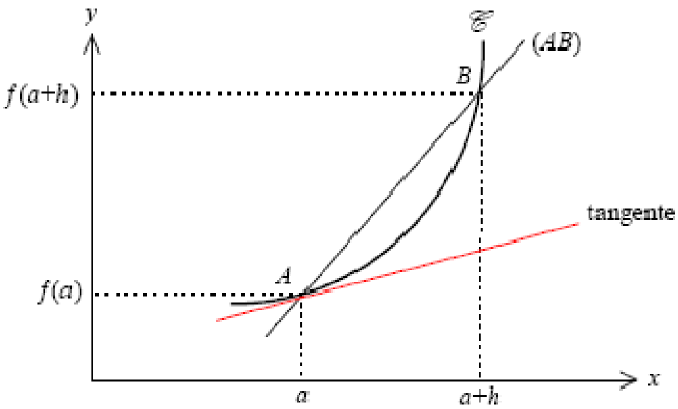
Définition 2:

On dit que f admet une limite égale à b quand x tend vers a si $f(x)$ devient aussi proche de b que possible lorsque x devient suffisamment proche de a

On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Dans la définition 1 si on pose $b = a + h$ alors le taux de variation de f entre a et b

devient $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$



Définition 3:

La limite lorsque h tend vers 0 de

$\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ s'appelle

le nombre dérivé de f en a

On écrit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Graphiquement, cela correspond à

A et B qui se rapprochent jusqu'à être confondus alors la droite (AB) devient tangente à la courbe C et $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a .

3. Tangente et approximation affine d'une fonction en un point .

L'équation de la tangente à C en a est $\boxed{y = f'(a).(x-a) + f(a)}$

La fonction $\Phi(x) : x \to f'(a).(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a

On a $f(x) = f'(a).(x-a) + f(a)+\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Méthode et exercices :

1) Pour trouver un nombre dérivés, on peut exprimer un taux de variation entre a et a+h puis simplifier et étudier la limite lorsque h tend vers 0.
2) La calculatrice permet de vérifier le résultat : avec la commande nDeriv ou deriv

Ex : *$f(x)=x^2+2x-1$. Montrer que f est dérivable en $a=3$ et calculer $f'(3)$. En déduire une équation de la tangente à C en $a=3$.*

Même question si a) $f(x)=x^2+4x-1$ et $a=2$ b) $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et $a=2$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=2$ d) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et $a=1$

3) Pour calculer une vitesse instantanée, on calcule la limite de la vitesse moyenne

$\frac{d(t0+h)-d(t0)}{h}$ Lorsque h tend vers 0.

Ex : La position d'une particule sur sa trajectoire rectiligne est donnée par la loi horaire $x(t)=t^2-2t+3$. A quel instant la vitesse instantanée de la particule est-elle égale a sa vitesse moyenne entre $t=0$ et $t=3$?

Ex : Une pierre est lancée verticalement vers le haut . Soit (Oz) un axe vertical orienté vers le haut. La position z de la pierre à l'instant t est donnée par la fonction $z(t)=-4,9t^2+28,4t$.

a) Déterminer la vitesse instantanée de la pierre à l'instant t.

b) Que représente la quantité 29,4 $m.s^{-1}$?

c) Avec quel vitesse la pierre repassera-t-elle à l'altitude 0 ?

4) Si on est suffisamment « proche » d'un nombre a, la tangente et la courbe d'une fonction sont très proche. Cela s'appelle une approximation affine.

Ex : En utilisant une approximation affine de la fonction carré pour x=3, donner (sans calculatrice) une valeur approchée de $3,01^2$.

4. Fonction dérivée

Définition 4:

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsque $f'(a)$ existe pour tout a appartenant à I

Attention : $f'(a)$ n'existe pas toujours : par exemple la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable

pour $x = 0$ car $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = 1$ si $h > 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas

$= -1$ si $h < 0$

Définition 5:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction qui à tout x appartenant à I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f on la note f'

5. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \geqslant 1)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 1)$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

6. Opérations sur les dérivées

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u+v$	$u'+v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
u^n	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = (3x^2-2)^5$ alors $f'(x) = 5(6x)\,(3x^2-2)^4 = 30x(3x^2-2)^4$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ alors $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x-4)-4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \frac{-20}{(4x-4)^2}$

7. Dérivées des fonctions de la forme *f(x) =g(ax+b)*

On admettra le résultat suivant :

$$f'(x) = a\, g'(ax + b)$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$. Comment la dériver ?

On remarque que f peut s'écrire $f(x) = g(3x - 1)$ où $g(t) = \sqrt{t}$.

Or, pour tout $t > 0$, on a : $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, donc $f'(x) = a\, g'(ax + b) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour tout $x > \dfrac{1}{3}$.

Exercice : À l'aide des résultats ci-dessus, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$
2) $f(x) = (x - 1)^2(3 - x)^3$
3) $f(x) = (x - 1)^4(x + 1)^4$
4) $f(x) = x^3(1 + \sqrt{x}\ )$
5) $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$
6) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$
7) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$
8) $f(x) = \sqrt{2-x}$

8. Variations de *f* et signe de *f'* - extremum local

Propriété 1 :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle E , le sens de variation de *f* est donné par le signe de sa dérivée *f' :*

- *f* est croissante sur E si et seulement si *f'* est positive sur E
- *f* est décroissante sur E si et seulement si *f'* est négative sur E
- *f* est constante sur E si et seulement si *f'* est nulle sur E

Propriété 2:

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle E et *a* appartenant à E

Si la dérivée de *f* s'annule et change de signe en *a* alors *f* admet un extremum local en ce point : un maximum ou un minimum

Méthode et exercices :

Pour calculer la dérivée d'une fonction, on peut repérer les fonctions de référence qui compose cette fonction, puis appliquer les formules.

Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de la dérivée.

Construire (en justifiant) le tableau de variation des fonctions suivantes.

a) $f(x)=x^2+x-2$ *b)* $g(x)=(x-1)^3$ *c)* $h(x)=x^3+5x^2-3x+4$

b) $k(x)=\sqrt{5-7x}$ *e)* $l(x)=\dfrac{3x-5}{2x+4}$ *f)* $q(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-3}$