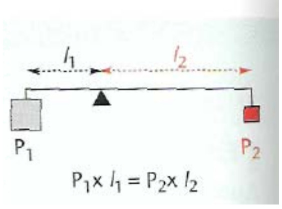
BARYCENTRE DANS LE PLAN

Un peu de Physique: La loi d'Archimède

- Un levier de masse négligeable est en équilibre sur un pivot G lorsque

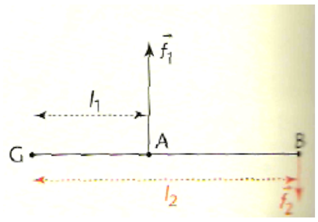
les produits des poids par les longueurs respectives des bras sont égaux



- Une barre rigide de masse négligeable pivote autour d'une extrémité G.

Deux forces de sens contraires sont appliquées en deux de ses points :

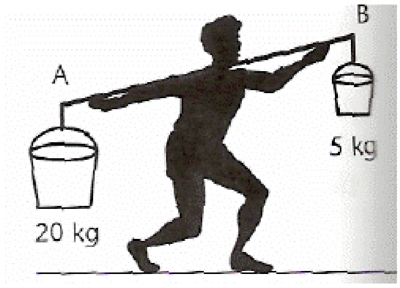
f_1 en A et f_2 en B. Il y a équilibre lorsque $f_1 . l_1 = f_2 . l_2$



<u>exemple 1:</u> **<u>le porteur d'eau</u>**

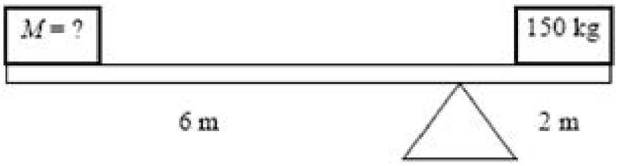
Un porteur d'eau met 20 l d'eau à l'extrémité A de sa perche de 2 m de long

et 5 l d'eau à l'autre extrémité B. Où faut-il placer le <u>point d'équilibre</u> G?



<u>exemple 2:</u>

Quelle doit être la masse M pour qu'il y ait équilibre?



<u>1) BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES</u>

<u>DEFINITION</u>

Soit A et B deux points du plan , a et b deux réels tels que **$a + b \neq 0$. (***a et b peuvent être négatifs)*

Il existe un unique point G vérifiant : $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Ce point G est appelé **<u>barycentre</u> des points pondérés** (A , a) et (B , b)

Alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ *(donc G est situé sur la droite (AB) .)*

Et réciproquement : tout point de (AB) est barycentre de A et B affectés de coefficients déterminés

<u>preuve :</u>

$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $a\,\overrightarrow{GA} + b\,(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ (d'après la relation de Chasles)

$\Leftrightarrow$ $(a+b)\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $(a+b)\,\overrightarrow{GA} = -\,b\,\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \quad (a+b)\,\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \quad (\text{ car } a+b \neq 0)$

Cas particulier: Si a = b , G est appelé **isobarycentre** de A et de B c'est le **milieu** du segment [AB]

Remarque : Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre appartient au segment [AB]

Remarque : Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre non nul

PROPRIETE

Si G est le barycentre de (A , a) , (B , b) , alors pour tout point M du plan :

$a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}$

Preuve:

On a , $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Donc pour tout point M du plan , on a :

$a(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + b(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ (d'après la relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \quad (a+b)\,\overrightarrow{GM} + a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}$

COORDONNEES

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points du plan.

Le barycentre G de (A , a) , (B , b) a pour coordonnées : $x_G = \dfrac{a\,x_A + b\,x_B}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{a\,y_A + b\,y_B}{a+b}$

Exemple : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on a , A (-1 ; -3) et B (2 ; 2) .

Placer le point G barycentre de (A , 1) , (B , 3)

2) BARYCENTRE DE 3 POINTS PONDERES

DEFINITION

Soit A , B et C trois points du plan , a , b et c trois réels tels que $\mathbf{a + b + c \neq 0}$.

Il existe un unique point G vérifiant : $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

G est le **barycentre** de (A , a) , (B , b) , (C , c) et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Cas particulier

Si a = b = c , G est appelé **isobarycentre** de A , B et C .et si A , B et C ne sont pas alignés alors c' est **le centre de gravité** du triangle ABC .

Remarque : Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre est situé à l'intérieur du triangle ABC

PROPRIETE

pour tout point M du plan : $a\,\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{MG}$

COORDONNEES :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(x_A ; y_A)$ $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$ trois points du plan.

Le barycentre G de (A , a) , (B , b) , (C , c) a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{a x_A + b x_B + c x_C}{a + b + c} \text{ et } y_G = \frac{a y_A + b y_B + c y_C}{a + b + c}$$

ASSOCIATIVITE DU BARYCENTRE , BARYCENTRE PARTIEL

Soit G le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) et H le barycentre de (A , a) , (B , b) .

Alors G est aussi le barycentre de (C , c) , (H , a + b) .

On peut remplacer deux points pondérés (A , a) et (B , b) par leur barycentre affecté du coefficient a + b (si $a + b \neq 0$)

Preuve:

Soit H le barycentre de (A , a) , (B , b) .

On a alors $a\,\overrightarrow{HA} + b\,\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

Soit G le barycentre de (A , a) , (B , b) , (C , c) .

On a alors $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad a(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}) + b(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad (a + b)\,\overrightarrow{GH} + a\,\overrightarrow{HA} + b\,\overrightarrow{HB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad (a + b)\,\overrightarrow{GH} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

On en déduit que G est le barycentre de (C , c) , (H , a + b) .

Exercice 1. On considère un triangle *ABC* et l'on désigne par *G* le barycentre de (A ; 1), (B ; 4) et (C ; -3).

a) Construire le barycentre I de (B ; 4) et (C ; -3).

b) Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$ et en déduire la position de G sur (*AI*).

Exercice 2. Soit *G* le barycentre de (A; 1), (B ; -1), (C ; 2) et (D ; 3).

a) Quelle relation vectorielle peut-on écrire ?

b) Soit J le barycentre de (A ; 1) et (C ; 2) et K le barycentre de (B ; -1) et (D ; 3).

Montrer que $3\,\overrightarrow{GJ} + 2\,\overrightarrow{GK} = \vec{0}$. Construire les points *J*, *K* et *G*.

c) Construire le barycentre L de (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 2). Montrer que $2\,\overrightarrow{GL} + 3\,\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

En déduire une nouvelle construction de *G*.